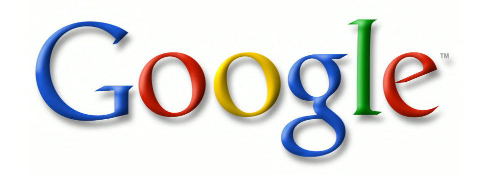




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung der Herren

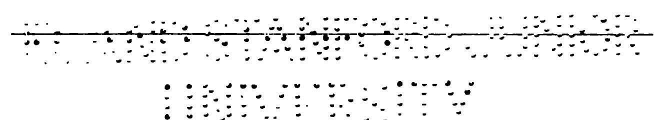
Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.



Band 111.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1893.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 111.

Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungsysteme.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Bevor wir an die Aufstellung des Irreductibilitätsbegriffes eines Systems algebraischer Differentialgleichungen gehen, mögen zunächst einige einfache Betrachtungen an einer algebraischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln von der Form

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.}$$

angestellt, und die Frage erörtert werden, ob und wann dieselbe mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung niedrigerer, derselben oder höherer Ordnung ein oder mehrere oder alle Integrale gemein hat.

Zunächst ist leicht zu sehen, *dass es partielle Differentialgleichungen* (1.) *giebt, die kein Integral mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung gemein haben, d. h. kein in x und y algebraisches Integral besitzen.* Denn es ist z. B. das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1-2xy)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2.}$$

in der Form darstellbar

$$z = \varphi\left(y e^{x^2} - \int e^{x^2} dx\right), \tag{3.}$$

worin φ eine willkürliche Function des eingeschlossenen Argumentes bedeutet; lieferte nun eine bestimmte Wahl φ_1 für φ eine algebraische Function z_1 von x und y, so wäre auch, wenn man $x = 0$ setzte, $(z_1)_{x=0} = \varphi_1(y)$ eine algebraische Function von y, und daher auch der Voraussetzung nach

$$\varphi_1\left(y e^{x^2} - \int e^{x^2} dx\right) = \omega(x,\ y), \tag{4.}$$

worin φ_1 und ω algebraische Functionen bedeuten; dies ist jedoch unmöglich,

da hieraus

$$(5.)\qquad ye^{x^2}-\int e^{x^2}dx = \Omega(x,\ y)$$

folgt, worin Ω ebenfalls algebraisch ist, und sich, indem man y irgend einen numerischen Werth ertheilt, $\int e^{x^2}dx$ als algebraische Function von x und e^{x^2} ergeben würde.

Aber die Eigenschaft, überhaupt keine algebraischen Integrale zu besitzen oder mit keiner partiellen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der ersten ein Integral gemein zu haben, genügt noch nicht, wie bei *gewöhnlichen* algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, auch für *partielle* Differentialgleichungen erster Ordnung ihren Charakter als den eines *irreductibeln* Gebildes, wie wir nachher sehen werden, festzustellen. Es wird sich vielmehr darum handeln, die Integrale dieser partiellen Differentialgleichung darauf hin zu untersuchen, ob dieselben auch gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung genügen können, in denen nur eine der beiden unabhängigen Veränderlichen als Variable, die andere als Parameter auftritt, wobei es offenbar gleichgültig ist, ob x oder y die Rolle der neuen unabhängigen Variabeln spielt, da, wenn ein Integral der Differentialgleichung (1.) zugleich die gewöhnliche algebraische Differentialgleichung

$$(6.)\qquad F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dots,\ \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right) = 0$$

befriedigt, sich mit Hülfe von (1.) aus (6.) für dasselbe Integral eine algebraische Differentialgleichung der Form

$$(7.)\qquad F_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \dots,\ \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

ableiten lässt, indem sich aus (1.) durch successive Differentiation nach x und y die Ausdrücke ergeben

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \omega_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \omega_{12}\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \omega_{11}\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = \omega_{122}\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \omega_{111}\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right),$$

$$\dots\ \frac{\partial^m z}{\partial x^m} = \omega\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \dots,\ \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right),$$

in denen die Functionen ω algebraisch aus den eingeschlossenen Grössen zusammengesetzt sind.

Zunächst ist unmittelbar einleuchtend, dass es algebraische partielle Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, welche einerseits gar keine algebraischen Integrale besitzen, andererseits aber auch Integrale haben, die überhaupt nicht gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung genügen können; denn das particuläre Integral der Differentialgleichung (2.)

$$(8.) \qquad z = \Gamma\left(ye^{x^2} - \int e^{x^2} dx\right)$$

würde, wenn es einer algebraischen Differentialgleichung

$$\Omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

genügte, für $x = 0$ die Differentialgleichung liefern

$$\Omega\left(0, y, \Gamma(y), \frac{d\Gamma(y)}{dy}, \frac{d^2\Gamma(y)}{dy^2}, \ldots, \frac{d^m\Gamma(y)}{dy^m}\right) = 0,$$

die unmöglich ist, da die Γ-Function bekanntlich nicht einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leistet.

Um nun zunächst an einem Beispiele zu sehen, wie sich für eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung diejenigen Integrale gruppiren, welche zugleich Integrale gewöhnlicher algebraischer Differentialgleichungen irgend welcher Ordnung sind, und diejenigen, welche derartigen gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht genügen, sei die homogene Differentialgleichung erster Ordnung vorgelegt

$$(9.) \qquad \omega_1(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + \omega_2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

in welcher ω_1 und ω_2 algebraische Functionen von x und y bedeuten, und sei

$$(10.) \qquad z = F(x, y)$$

dasjenige um die Nullpunkte von x und y endliche und eindeutige Integral von (9.), welches für $x = 0$ in $z_{x=0} = y$ übergeht, und dessen Existenz bekanntlich erwiesen ist, wenn angenommen wird, dass $\frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)}$ sich um $x = 0$, $y = 0$ herum in eine nach positiven ganzen steigenden Potenzen von x und y fortschreitende convergirende Reihe entwickeln lässt*); das all-

*) Die folgenden Schlüsse bleiben unverändert, wenn man für $F(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung (9.) nimmt, welches für $x = 0$ in irgend eine alge-

gemeine Integral ist dann in der Form darstellbar

$$z = \Phi[F(x, y)], \tag{11.}$$

worin Φ eine willkürliche Function bedeutet.

Habe nun für irgend eine Wahl der Φ-Function das Integral

$$z_1 = \Phi_1[F(x, y)] \tag{12.}$$

die Eigenschaft, einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung

$$\Omega\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^m z_1}{\partial y^m}\right) = 0 \tag{13.}$$

zu genügen, so ergiebt sich aus dieser Gleichung durch Substitution von (12.) und deren nach y genommenen Differentialquotienten

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega\Big(x, y, \Phi_1[F(x, y)], \Phi_1'[F(x, y)]\frac{\partial F}{\partial y}, \ldots, \\ &\qquad \Phi_1^{(m)}[F(x, y)]\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^m + \cdots + \Phi_1'[F(x, y)]\frac{\partial^m F}{\partial y^m}\Big) = 0, \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

und hieraus, wenn $x = 0$, also $F(0, y) = y$ gesetzt wird,

$$\Omega(0, y, \Phi_1(y), \Phi_1'(y), \Phi_1''(y), \ldots, \Phi_1^{(m)}(y)) = 0, \tag{15.}$$

es muss somit unter der gemachten Annahme die Φ_1-Function selbst einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung Genüge leisten.

Setzt man nun

$$F(x, y) = t, \tag{16.}$$

so ergiebt sich aus (14.) die in der abhängigen Variabeln t, der Function $\Phi_1(t)$ und deren Ableitungen, und der unabhängigen Variabeln y algebraische Gleichung

$$\Omega\left(x, y, \Phi_1(t), \Phi_1'(t)\frac{\partial t}{\partial y}, \ldots, \Phi_1^{(m)}(t)\Big(\frac{\partial t}{\partial y}\Big)^m + \cdots + \Phi_1'(t)\frac{\partial^m t}{\partial y^m}\right) = 0, \tag{17.}$$

und aus (15.), indem daselbst y durch t ersetzt wird,

$$\Omega(0, t, \Phi_1(t), \Phi_1'(t), \ldots, \Phi_1^{(m)}(t)) = 0. \tag{18.}$$

Differentiirt man die beiden Gleichungen (17.) und (18.) m-mal nach y, so erhält man $2m+2$ algebraische Gleichungen in den Grössen

$$x, y, t, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{2m} t}{\partial y^{2m}} \tag{α.}$$

---

braische Function von y übergeht, die nur mit der Entwickelbarkeit des Quotienten $\frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)}$ verträglich ist; die obige Wahl ist nur der Einfachheit wegen getroffen.

und

$$(\beta.)\qquad \Phi_1(t),\quad \Phi_1'(t),\quad \ldots,\quad \Phi_1^{(2m)}(t),$$

aus denen die $2m+1$ Grössen $(\beta.)$ eliminirt werden können, so dass sich eine algebraische Gleichung in den Grössen $(\alpha.)$ von der Form ergiebt

$$(19.)\qquad \psi\left(x,\ y,\ t,\ \frac{\partial t}{\partial y},\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2m} t}{\partial y^{2m}}\right) = 0,$$

oder nach (16.)

$$(20.)\qquad \psi\left(x,\ y,\ F(x,\ y),\ \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2m} F(x,\ y)}{\partial y^{2m}}\right) = 0;$$

es muss somit auch das von den zwei unabhängigen Variabeln x und y abhängige Integral der partiellen Differentialgleichung (9.), *welches für $x = 0$ in y übergeht, einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung Genüge leisten.*

Umgekehrt wird aber auch, wenn

$$(21.)\qquad F(x,\ y) = t$$

einer algebraischen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(22.)\qquad f\left(x,\ y,\ t,\ \frac{\partial t}{\partial y},\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^\mu t}{\partial y^\mu}\right) = 0$$

Genüge leistet, und die Function Φ_1 als das Integral einer beliebigen gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung

$$(23.)\qquad g(t,\ \Phi_1(t),\ \Phi_1'(t),\ \ldots,\ \Phi_1^{(\nu)}(t)) = 0$$

definirt ist, das Integral

$$(24.)\qquad z_1 = \Phi_1[F(x,\ y)]$$

ebenfalls eine gewöhnliche algebraische Differentialgleichung befriedigen; denn da

$$\frac{\partial \Phi_1[F(x,\ y)]}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1[F(x,\ y)]}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist, so folgt aus (23.) durch Substitution der nach t genommenen Differentialquotienten von $\Phi_1(t)$ eine algebraische Gleichung der Form

$$(25.)\qquad G\left(t,\ \frac{\partial t}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^\nu t}{\partial y^\nu},\ \Phi_1[F(x,\ y)],\ \frac{\partial \Phi_1[F(x,\ y)]}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^\nu \Phi_1[F(x,\ y)]}{\partial y^\nu}\right) = 0,$$

und wenn man die Gleichung (22.) ν-mal, die Gleichung (25.) μ-mal nach

y differentiirt, $\mu+\nu+2$ in den $\mu+\nu+1$ Grössen

$$t, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{\mu+\nu} t}{\partial y^{\mu+\nu}}$$

algebraische Gleichungen, deren Elimination vermöge der Substitution (24.) eine gewöhnliche algebraische Differentialgleichung der Form

$$(26.) \qquad H\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^{\mu+\nu} z_1}{\partial y^{\mu+\nu}}\right) = 0$$

liefert.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt aber, dass, wenn die partielle Differentialgleichung (9.) *überhaupt kein particuläres Integral besitzen soll, welches einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung genügen soll, es nothwendig und hinreichend ist, dass $F(x, y)$ keine solche Differentialgleichung befriedigt,* da, wenn ein solches particuläres Integral existiren soll, das Integral $F(x, y)$ dieselbe Eigenschaft haben muss; wenn dieses jedoch die verlangte Eigenschaft hat, so wird auch jedes der unendlich vielen Integrale, welches aus $F(x, y)$ mittelst irgend einer Function gebildet ist, die als Integral einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung definirt wird, ebendiese Eigenschaft besitzen. Will man somit von einer Differentialgleichung der Form (9.) nachweisen, dass *keines* ihrer Integrale einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist dies nur von demjenigen particulären Integrale zu zeigen, welches für $x = 0$ den Werth y annimmt.

So lässt sich leicht einsehen, *dass für jede partielle Differentialgleichung von der Form*

$$(27.) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

in welcher $\varphi(y)$ eine algebraische Function von y bedeutet, das für $x = 0$ in den Werth y übergehende Integral der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(28.) \qquad \frac{dz}{dx} + \varphi(z) = 0$$

Genüge leistet. Denn da das allgemeine Integral der Differentialgleichung (27.) bekanntlich durch

$$(29.) \qquad z = \psi\left(\int \frac{dy}{\varphi(y)} - x\right)$$

dargestellt ist, worin ψ eine willkürliche Function bedeutet, so wird, wenn

z für $x = 0$ in y übergehen soll, ψ so bestimmt werden müssen, dass

$$(30.) \qquad y = \psi\Big(\int\frac{dy}{\varphi(y)}\Big)$$

ist, d. h. es muss ψ die Umkehrungsfunction des Integrales $\int\frac{dy}{\varphi(y)}$ sein, oder es muss wegen

$$(31.) \qquad \int\frac{dy}{\varphi(y)} = t, \quad y = \psi(t), \quad \text{also} \quad \psi'(t) = \varphi(y)$$

sein; dann ist aber nach (29.)

$$(32.) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\psi'\Big(\int\frac{dy}{\varphi(y)} - x\Big)$$

und vermöge (31.)

$$(33.) \qquad \psi'\Big(\int\frac{dy}{\varphi(y)} - x\Big) = \varphi(z),$$

woraus durch Zusammensetzung von (32.) und (33.) die gewöhnliche algebraische Differentialgleichung (28.) sich ergiebt.

Aber es existiren auch algebraische partielle Differentialgleichungen der Form (9.), *für welche keines ihrer Integrale einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung Genüge leistet.*

Zunächst wollen wir die Bedingung aufstellen, welche die Coefficienten $\omega_1(x, y)$ und $\omega_2(x, y)$ erfüllen müssen, damit die Differentialgleichung (9.) mit einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung *erster* Ordnung ein Integral gemein hat; sei die letztere durch

$$(34.) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x, y, z),$$

dargestellt, worin φ eine algebraische Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, so kann man, wenn

$$-\frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)} = F(x, y)$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung (9.) vermöge (34.) durch

$$(35.) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y).\varphi(x, y, z)$$

ersetzen, und es ist unmittelbar ersichtlich, dass nicht für jede Wahl der algebraischen Function $F(x, y)$ von x und y sich eine algebraische Function $\varphi(x, y, z)$ bestimmen lässt von der Art, dass die Differentialgleichungen (34.) und (35.) ein gemeinsames, nicht algebraisches Integral besitzen. Denn

die Gleichsetzung der aus diesen beiden Gleichungen durch Differentiation nach x und y hervorgehenden Werthe für $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ liefert die Bedingungsgleichung

$$\text{(36.)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - F(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\varphi,$$

und es müsste, wenn jede partielle Differentialgleichung (9.) mit einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung ein Integral gemein haben sollte, die Differentialgleichung (36.) für eine beliebige algebraische Function $F(x, y)$ ein in x und y algebraisches Integral $\varphi(x, y)$ besitzen; dies ist aber offenbar nicht der Fall, da z. B. für die Wahl

$$F(x, y) = \frac{1}{x} + y$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{1}{x} + y\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi$$

das allgemeine Integral besitzt

$$\varphi = e^x \omega\left(e^x y + \int \frac{e^x}{x} dx\right),$$

worin ω eine willkürliche Function bedeutet, in die z als Parameter eintreten kann, und es ist leicht zu sehen, dass φ für keine Wahl der Function ω eine algebraische Function von x und y sein kann, weil sich sonst $\int \frac{e^x}{x} dx$ algebraisch durch x und e^x ausdrücken lassen würde, was bekanntlich nicht der Fall ist; die dem angenommenen Werthe von $F(x, y)$ zugehörige partielle Differentialgleichung (9.)

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{1}{x} + y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

hat zum allgemeinen Integrale

$$z = \Omega\left(e^x y + \int \frac{e^x}{x} dx\right),$$

worin Ω eine willkürliche Function bedeutet, besitzt also einerseits, wie wiederum unmittelbar zu sehen ist, kein algebraisches Integral, andererseits genügt z. B. das Integral

$$z = e^x y + \int \frac{e^x}{x} dx$$

erst der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(x^2 y + x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 y + x - 1)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Dass im Allgemeinen aber auch partielle Differentialgleichungen der Form (9.) existiren, für welche keines ihrer Integrale einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung Genüge leistet, können wir schon daraus entnehmen, dass, wenn wir die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} \tag{37.}$$

für ein bestimmtes, aber beliebiges y als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in z und x auffassen, dieselbe aussagt, dass sie auch für alle anderen y erfüllt sein muss, dass somit alle die unendlich vielen Differentialgleichungen, welche man durch wiederholte partielle Differentiation nach y aus (37.) erhält, zugleich mit der Differentialgleichung (37.) bestehen müssen, so dass, wenn

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = z_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = z_3, \quad \dots \tag{38.}$$

gesetzt wird, *jedes Integral der partiellen Differentialgleichung* (37.) *ein Integralelement des algebraischen totalen linearen Differentialgleichungssystems mit unendlich vielen abhängigen Variabeln ist*

$$\tag{39.} \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = F(x, y) z_1, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} z_1 + F z_2, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} z_1 + 2\dfrac{\partial F}{\partial y} z_2 + F z_3, \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial x} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial y^3} z_1 + 3\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} z_2 + 3\dfrac{\partial F}{\partial y} z_3 + F z_4, \\ \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dieses System somit der partiellen Differentialgleichung (37.) *aequivalent ist.* Findet zwischen $z, z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ eine algebraische Beziehung

$$G(x, y, z, z_1, z_2, \dots, z_\lambda) = 0 \tag{40.}$$

statt, so werden die ersten λ Gleichungen des unendlichen Systems (39.), nachdem in die letzte derselben der Werth von z_λ aus der Gleichung (40.) durch $x, y, z, z_1, z_2, \dots, z_{\lambda-1}$ ausgedrückt substituirt worden, ein vollständiges algebraisches totales Differentialgleichungsystem in den λ abhängigen Variabeln $z, z_1, z_2, \dots, z_{\lambda-1}$ bilden, d. h. es wird z einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung höherer Ordnung genügen,

und umgekehrt wird die Existenz eines solchen endlichen vollständigen Differentialgleichungsystems eine algebraische Beziehung von der Form (40.) nach sich ziehen. Dass nun nicht für jedes Integral der Differentialgleichung (37.) das unendliche System (39.) in ein endliches übergehen muss, ist schon aus der Analogie mit den entsprechenden Betrachtungen für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ersichtlich; sei nämlich die Differentialgleichung vorgelegt

$$(41.) \qquad z = \Omega(x)\frac{dz}{dx},$$

so wird diese, wenn man

$$\frac{dz}{dx} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \dots$$

setzt, *aequivalent sein dem unendlichen Systeme linearer algebraischer Gleichungen*

$$(42.) \qquad \begin{cases} z = \Omega(x)z_1, \\ z_1 = \Omega'(x)z_1 + \Omega(x)z_2, \\ z_2 = \Omega''(x)z_1 + 2\Omega'(x)z_2 + \Omega(x)z_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Eine in (42.) nicht enthaltene algebraische Beziehung zwischen x und einigen der Grössen z, z_1, z_2, ... liefert vermöge (42.) z selbst als algebraische Function von x, würde also in bekannter Weise die gewöhnliche Differentialgleichung (41.) als eine *reductible* definiren, während wir wissen, dass es irreductible Differentialgleichungen der Form (41.) giebt, die also überhaupt keine algebraischen Integrale besitzen.

Diese im Vorigen angestellten Ueberlegungen bezüglich der charakteristischen Unterschiede der Integrale einer partiellen Differentialgleichung unter einander sowie der Klassen der Gesammtintegrale verschiedener partieller Differentialgleichungen hinsichtlich ihrer Zugehörigkeit nur zu partiellen oder auch zu gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen, führen uns nun zur Aufstellung des in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigen Begriffes der *Irreductibilität*, der zuerst an *einer* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erläutert werden soll.

Bekanntlich lässt sich jede algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit *einer* abhängigen und μ unabhängigen Variabeln auf

die Form bringen

$$(43.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right)}{\partial t_1} \dfrac{\partial u}{\partial z_1} \\ \qquad = G_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}, t_1\right), \end{cases}$$

worin G und G_1 ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen

$$(\alpha.)\qquad z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$$

algebraisch irreductiblen Gleichung

$$(44.)\qquad G\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

ist, und *es soll eine solche partielle Differentialgleichung* (43.) *eine irreductible genannt werden, wenn keines ihrer Integrale das Element eines Integralsystems irgend eines Systemes algebraischer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit beliebig vielen abhängigen und nur* $\mu-1$ *der unabhängigen Variabeln* $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ *bildet, oder, was dasselbe ist, wenn keines ihrer Integrale eine algebraische partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit nur* $\mu-1$ *der unabhängigen Variabeln befriedigt*).*

---

*) Es ist leicht einzusehen, dass, ebenso wie jede algebraische partielle Differentialgleichung höherer Ordnung in ein simultanes System algebraischer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung umgesetzt werden kann, auch aus jedem Systeme erster Ordnung für jede der abhängigen Variabeln *eine* algebraische partielle Differentialgleichung höherer Ordnung durch successive partielle Differentiation nach den unabhängigen Variabeln hergeleitet werden kann; denn sei m die Klasse des partiellen Differentialgleichungsystems erster Ordnung, welche durch die Anzahl der abhängigen Variabeln definirt wird, und μ die Anzahl der unabhängigen Variabeln, so ist einleuchtend, dass durch k-mal nach einander nach den Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ vollzogene partielle Differentiationen

$$m\left(1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\cdots+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k-1)}{1.2\ldots k}\right)$$

Gleichungen entstehen, aus denen $m-1$ der abhängigen Variabeln nebst sämmtlichen durch die successive Differentiation eintretenden Ableitungen derselben, deren Gesammtzahl

$$(m-1)\left(1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\cdots+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}{1.2\ldots(k+1)}\right)$$

beträgt, offenbar dann eliminirt werden können, wenn

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\cdots+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}{1.2\ldots(k+1)} > m\cdot\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}{1.2\ldots(k+1)}$$

ist, was durch ein hinreichend gross gewähltes k stets erreicht werden kann.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ist also irreductibel, wenn sie mit keiner gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung ein Integral gemein hat.

Daraus ergiebt sich von selbst, dass *eine irreductible partielle Differentialgleichung algebraische Integrale überhaupt nicht enthalten kann.*

Habe nun irgend ein Integral u_1 der Differentialgleichung (43.) die Eigenschaft, ein Element eines Systemes von Integralen eines algebraischen partiellen Differentialgleichungssystems beliebiger Klasse mit den unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ zu sein, welches sich bekanntlich auf die Form bringen lässt

$$(45.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} \\ \quad = H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial z_1} \\ \quad = H_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right), \end{cases}$$

worin $H, H_1, \ldots, H_\lambda$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen und τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung jener eingeschlossenen Grössen irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(46.)\quad H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau\right) = 0$$

bedeutet, und sei das bezügliche Integralsystem

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_\lambda,$$

so wird sich durch Gleichsetzen der Werthe für $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}$ aus (43.) und der ersten der Gleichungen (45.) eine Beziehung der Form

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial \tau_1} G_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots\right) \\ = \dfrac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial t_1} H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots\right) \end{cases}$$

ergeben, die entweder identisch ist oder eine Differentialgleichung in $u_1, \ldots, u_\lambda$ liefert, die $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}$ nicht enthält. Ist dieselbe identisch, so ergiebt sich von selbst, *dass jedes Integral der Differentialgleichung* (43.) *das Element eines Integralsystems des partiellen Differentialgleichungssystems* (45.) *sein muss;* ist die Gleichung (47.) jedoch keine identische, so hat das algebraische partielle Differentialgleichungsystem

$$(48.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial \tau_1} \cdot G_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots\right) \\ \quad - \dfrac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial t_1} H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \ldots, v_\lambda, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots\right) = 0, \\ \qquad \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial v_2}{\partial z_1} = H_2, \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial z_1} = H_\lambda \end{cases}$$

das Integralsystem $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$. Da sich aber aus dem Systeme (48.) für v_1 eine algebraische partielle Differentialgleichung höherer Ordnung mit den unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ ergiebt, welche durch $v_1 = u_1$ befriedigt wird, ebendiese Differentialgleichung aber durch Substitution der aus (43.) und deren nach z_1 genommenen Differentialquotienten hervorgehenden Ausdrücke für $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \ldots$ durch $z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1$ und die nach $z_2, \ldots, z_\mu$ genommenen Differentialquotienten nur die nach den $\mu-1$ Variabeln $z_2, \ldots, z_\mu$ genommenen partiellen Differentialquotienten enthält, während z_1 nur als Parameter in die Gleichung eintritt, so muss, weil der Annahme nach die Differentialgleichung (43.) eine irreductible sein sollte, also keines ihrer Integrale irgend einer algebraischen partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit weniger als μ unabhängigen Variabeln angehören durfte, die letzterhaltene partielle Differentialgleichung höherer Ordnung mit den Variabeln $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ eine identische sein, und somit jedes Integral der Differentialgleichung (43.) ein Element eines Integralsystemes des partiellen Differentialgleichungssystemes (45.) bilden, während die anderen Integralelemente sich aus den bei der algebraischen Elimination benutzten Ausdrücken für $v_2, \ldots, v_\lambda$ ergeben.

Es erübrigt noch, den Fall zu untersuchen, dass das System (45.)

nur aus *einer* algebraischen partiellen Differentialgleichung

$$(49.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} \\ \qquad = H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \tau_1\right) \end{cases}$$

besteht, worin τ_1 eine Lösung der irreductibeln Gleichung

$$(50.)\qquad H\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \tau\right) = 0$$

ist. Ein gemeinsames Integral u_1 der beiden Differentialgleichungen (43.) und (49.) würde u_1 auch als Integral der Differentialgleichung

$$(51.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial \tau_1} \cdot G_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots\right) \\ = \dfrac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots\right)}{\partial t_1} H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots\right) \end{cases}$$

darstellen, und es müsste in Folge der angenommenen Irreductibilität der Differentialgleichung (43.) diese Gleichung wiederum eine identische sein, und *zunächst wieder alle Integrale von* (43.) *den beiden partiellen Differentialgleichungen* (43.) *und* (49.) *gemeinsam sein.* Man kann aber hieran noch eine weitere Folgerung knüpfen; bringt man nämlich die Gleichung (50.) auf die Form

$$(52.)\quad \begin{cases} \tau^\nu + \omega_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}\right)\tau^{\nu-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + \omega_\nu\left(z_1, \ldots, z_\mu, v_1, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{cases}$$

worin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und bemerkt, dass sich, wie bekannt, die Reduction auf die Normalform (43.) so vollziehen lässt, dass t_1 eine rationale Function von

$$z_1, \ \ldots, \ z_\mu, \ u, \ \frac{\partial u}{\partial z_1}, \ \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$$

ist, sich also auch für die den beiden Gleichungen (43.) und (49.) gemeinsamen Integrale u, welche nach dem eben bewiesenen Satze jedes Integral der Differentialgleichung (43.) bedeuten dürfen, mit Hülfe von (49.) und (52.) als ganze Function von τ_1 vom $(\nu-1)$ten Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $z_1, \ldots, z_\mu, u, \dfrac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}$ sind, in der Form

darstellen lässt

$$(53.)\quad \begin{cases} t_1 = \Omega_0\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) \\ \quad +\Omega_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right)\tau_1+\cdots \\ \qquad \cdots+\Omega_{\nu-1}\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right)\tau_1^{\nu-1}, \end{cases}$$

so folgt bekanntlich durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit

$$(54.)\quad \begin{cases} \tau_1^\nu + \omega_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right)\tau_1^{\nu-1}+\cdots \\ \qquad \cdots+\omega_\nu\left(z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0 \end{cases}$$

oder durch Elimination von τ_1 zwischen diesen Gleichungen für t_1 eine algebraische Gleichung vom νten Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$ sind. Daraus folgt aber, dass, weil die Gleichung (44.) eine algebraisch irreductible sein sollte, der Grad dieser Gleichung in t grösser oder gleich ν sein muss, oder dass, *wenn der Grad dieser Gleichung als der Grad der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung definirt wird,*

eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, aber niedrigeren Grades nie ein Integral gemein haben kann, dass sie aber, wenn sie mit einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und höheren Grades ein gemeinschaftliches Integral hat, alle Integrale mit dieser gemein haben muss.

Zugleich folgt aus dem eben bewiesenen Satze,

dass für eine irreductible partielle Differentialgleichung (43.) *die mit Adjungirung von* $z_1, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}$ *algebraisch irreductible Gleichung* (44.) *für* t_1 *auch mit Adjungirung von* $z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}$, *worin* u_1 *ein specielles Integral von* (43.) *bedeutet, algebraisch irreductibel bleibt.*

Fassen wir die oben gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den Satz:

dass, wenn eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einem partiellen Differentialgleichungssystem höherer Klasse oder derselben (ersten) Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integral gemein

hat, dann auch sämmtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Elemente von Integralsystemen des partiellen Differentialgleichungssystems bilden werden.

Stellen wir also eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung (43.) mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung

$$(55.)\quad \begin{cases} F\Big(z_1,\ z_2,\ \dots\ z_\mu,\ u,\ \dfrac{\partial u}{\partial z_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^\nu u}{\partial z_1^\nu},\ \dots,\ \dfrac{\partial^\nu u}{\partial z_\mu^\nu}\Big) = 0 \end{cases}$$

zusammen und bemerken, dass letztere sich stets auf ein partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung (45.) zurückführen lässt, so folgt,

dass, wenn eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung ein Integral gemein hat, sie alle Integrale mit derselben gemein haben, also selbst ein algebraisches Integral der letzteren sein muss.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass aus den oben gemachten Auseinandersetzungen unabhängig von der Irreductibilität der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sich der folgende Satz ergiebt:

Wenn eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit μ unabhängigen Variabeln mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung $m$ter Ordnung und denselben μ unabhängigen Variabeln ein Integral gemein hat, und es ist jene Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf den partiellen Differentialquotienten nach der einen Variablen in algebraischem Sinne irreductibel, andererseits das gemeinsame Integral so beschaffen, dass es nicht schon einer partiellen Differentialgleichung $m$ter Ordnung nach den $\mu-1$ anderen unabhängigen Variabeln genügt, während die μte nur als Parameter algebraisch eintritt, so wird die partielle Differentialgleichung erster Ordnung alle Integrale mit derjenigen $m$ter Ordnung gemein haben.

Sei z. B. die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial u}{\partial z_2} = u$$

vorgelegt, deren allgemeines Integral in der Form enthalten ist

$$u = e^{z_1}\varphi(z_2 - z_1),$$

worin φ eine willkürliche Function bedeutet, so ist leicht zu sehen, dass das particuläre Integral

$$u = e^{z_1}[z_2 - z_1 + \log(z_2 - z_1) + \sin(z_2 - z_1)]$$

der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} - 2\frac{\partial u}{\partial z_1} + u + \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial u}{\partial z_2} = 0$$

Genüge leistet; da aber das particuläre Integral, wie man sich leicht überzeugt, nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt sondern erst einer solchen dritter Ordnung von der Form

$$\omega\left(z_1, z_2, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial z_1^3}\right) = 0,$$

so werden sämmtliche im allgemeinen Integrale enthaltenen Ausdrücke auch Integrale der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein.

Nachdem nun der Begriff der Irreductibilität für *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung festgestellt und der Fundamentalsatz eines jeden irreductiblen Gebildes hergeleitet worden, wird es sich darum handeln, diesen Begriff auf beliebige partielle Differentialgleichungsysteme erster Ordnung zu übertragen, nachdem wir zuvor noch den speciellen Fall der partiellen Differentialgleichungsysteme erster Ordnung und zweiter Klasse behandelt haben werden.

Habe also ein Integralsystem u_1 und u_2 des algebraischen Differentialgleichungsystems

$$(56.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}, t_1\right)}{\partial t_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} \\ \quad = G_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}, t_1\right), \\ \dfrac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}, t_1\right)}{\partial t_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} \\ \quad = G_2\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}, t_1\right), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der eingeschlossenen Grössen algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(57.)\quad G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}, t\right) = 0$$

ist, die Eigenschaft, zwei Integralelemente eines Systems von Integralen

eines algebraischen partiellen Differentialgleichungsystems beliebiger Klasse mit denselben unabhängigen Variabeln

$$(58.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} \\ \quad = H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right), \\ \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} \\ \quad = H_2\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right)}{\partial \tau_1} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial z_1} \\ \quad = H_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1\right) \end{cases}$$

zu bilden, worin τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung der eingeschlossenen Grössen algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(59.)\quad H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau\right) = 0$$

ist, und *sei das Differentialgleichungsystem zweiter Klasse* (56.) *in dem Sinne irreductibel, dass es* **kein** *Integralsystem besitze, von welchem schon eines der beiden Integralelemente das Element eines Integralsystems eines algebraischen partiellen Differentialgleichungsystems beliebiger Klasse mit den μ unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ bilde, in welchem jedoch nur das gemeinsame Integralelement oder gar keines nach der Variabeln z_1 differentiirt vorkommt* — unter dieser Voraussetzung soll die Gültigkeit des Fundamentalsatzes irreductibler Gebilde nachgewiesen werden.

Eliminirt man nämlich zwischen den λ Gleichungen (58.) in bekannter Weise durch successive Differentiation nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die abhängigen Variabeln $u_3, u_4, \ldots, u_\lambda$, so erhält man zwei algebraische partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung von der Form

$$(60.)\quad \begin{cases} \Omega_1\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \\ \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_1}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

$$(61.)\quad \begin{cases} \Omega_2\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_1}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0; \end{cases}$$

sind diese beiden Gleichungen nicht identisch, so würde man zunächst aus diesen Gleichungen und den beiden Gleichungen (56.) durch successive Differentiation nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ und Elimination der Werthe von

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \ldots, \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1 \partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_2}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \ldots, \end{cases}$$

in den nach $z_2, \ldots, z_\mu$ genommenen partiellen Differentialquotienten von u_1 und u_2 zwei algebraische partielle Differentialgleichungen der Form herleiten können

$$(62.)\quad \begin{cases} \omega_1\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \frac{\partial u_2}{\partial z_3}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_2}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0 \end{cases}$$

und

$$(63.)\quad \begin{cases} \omega_2\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \frac{\partial u_2}{\partial z_3}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_2}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

und wenn sodann zwischen (62.) und (63.) durch successive Differentiation nach den Variabeln $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ die Variable u_2 eliminirt würde, eine algebraische partielle Differentialgleichung

$$(64.)\quad \omega\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots\Big) = 0,$$

welche keinen nach z_1 genommenen partiellen Differentialquotienten von u_1 enthält und sich somit in ein algebraisches partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung verwandeln lässt, in welches z_1 nur als Parameter eintritt. Sind dagegen die beiden Gleichungen (60.) und (61.) identisch, so schaffe man wiederum durch successive Differentiation der Gleichungen (56.) nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die Grössen (α.) aus der Gleichung (60.) heraus, so

dass sich eine algebraische Beziehung der Form ergiebt

$$(65.)\quad \begin{cases} F\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \frac{\partial u_2}{\partial z_3}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_2}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

und stellt man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen (56.), in welcher $\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1$ gesetzt ist,

$$(66.)\quad f_1\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}\Big) = 0$$

zusammen, so erhält man durch successive Differentiation von (65.) und (66.) nach den Variabeln $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ und Elimination von u_2 und den nach diesen Variabeln genommenen partiellen Ableitungen eine algebraische Beziehung der Form

$$(67.)\quad \begin{cases} \varphi\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \frac{\partial v_1}{\partial z_3}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots, \frac{\partial^{\nu+\tau} v_1}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

welche durch ein partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung ersetzt werden kann, in welchem *eine* Differentialgleichung lautet: $\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1$, während in den übrigen keine nach z_1 genommenen partiellen Ableitungen der eintretenden Variabeln vorkommen. *Definirt man also das Differentialgleichungsystem zweiter Klasse* (56.) *in dem Sinne als irreductibel, dass keines seiner Integralelemente u_1 als Integralelement irgend einem algebraischen partiellen Differentialgleichungsysteme erster Ordnung angehört, in welchem entweder eine der μ unabhängigen Variabeln z_1 nur als Parameter vorkommt oder welches nur u_1 partiell nach z_1 abgeleitet enthält, während die anderen abhängigen Variabeln nur nach $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ partiell differentiirt vorkommen, so werden die resultirenden Gleichungen* (64.) *oder* (67.) *identische sein müssen, und somit wieder nach bekannten Schlüssen, wie sie oben durchgeführt worden, der Fundamentalsatz gelten, dass alle Integralsysteme von* (56.) *auch Elemente von Integralsystemen des Differentialgleichungsystemes* (58.) *sein werden, wenn $\lambda > 2$ ist, und dass dies auch für $\lambda = 2$ der Fall sein wird,*

wenn der Grad des Differentialgleichungsystemes (58.) *grösser ist als der des Systemes* (56.).

Nach Feststellung der hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Fundamentalsatzes irreductibler Gebilde für partielle Differentialgleichungsysteme erster und zweiter Ordnung wird es nunmehr möglich sein, die allgemeine Definition für die Irreductibilität partieller Differentialgleichungsysteme aufzustellen und die Gültigkeit des Fundamentalsatzes zu erweisen.

Sei das partielle Differentialgleichungsystem $m$ter Klasse mit den m abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_m$ und den μ unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ vorgelegt,

$$(68.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = G_1, \\ \dfrac{\partial G}{\partial t_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = G_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial G}{\partial t_1}\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1} = G_m, \end{cases}$$

worin $G, G_1, \ldots, G_m$ ganze Functionen der Grössen

$$(\beta.)\quad \begin{cases} z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t_1, \end{cases}$$

und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen $(\beta.)$ algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(69.)\quad \begin{cases} G\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t\Big) = 0 \end{cases}$$

ist, so soll dasselbe ein ***irreductibles*** *genannt werden, wenn* ***kein*** *System von* 1, 2, 3, ... *oder* $m-1$ *Integralelementen* $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ *wiederum* 1, 2, 3, ... *oder* $m-1$ *Elemente eines Integralsystems eines partiellen Differentialgleichungsystems beliebiger Klasse und beliebigen Grades bildet, in welchem von den nach* z_1 *genommenen partiellen Differentialquotienten nur*

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \text{ oder } \ldots \text{ oder } \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_{m-1}}{\partial z_1}$$

(oder auch einzelne von diesen nicht) enthalten sind, oder welches die Form hat

$$(70.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = v_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial z_1} = v_k, \\ \psi_{k+1}\Big(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k,\ v_{k+1},\ \ldots,\ v_{k+\varepsilon}, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \\ \cdot \\ \psi_{k+\varepsilon}\Big(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k,\ v_{k+1},\ \ldots,\ v_{k+\varepsilon}, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v_{k+\varepsilon}}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \end{cases}$$

worin k eine der Zahlen $1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ *bedeuten darf und* $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{k+\varepsilon}$ *algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen sind.*

Es soll nunmehr der Fundamentalsatz der Irreductibilität bewiesen werden, der folgendermassen lautet:

Wenn ein Integralsystem des irreductibeln Differentialgleichungssystems (68.) *einen Theil der Elemente oder alle Elemente eines Integralsystems des algebraischen partiellen Differentialgleichungssystems höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren Grades*

$$(71.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = H_1, \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = H_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial H}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial z_1} = H_\lambda \end{cases}$$

bildet, worin $H,\ H_1,\ \ldots,\ H_\lambda$ ganze Functionen der Grössen

$$(\gamma.)\quad z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\lambda,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ \ldots,\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu},\ \tau_1,$$

und τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen $(\gamma.)$ algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(72.)\quad H\Big(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\lambda,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ \ldots,\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu},\ \tau\Big) = 0$$

ist, so werden alle Integralsysteme von (68.) ***das Differentialgleichungsystem*** (71.) ***befriedigen.***

Ist nämlich $\lambda > m$, so eliminire man zunächst durch successive Differentiation nach den Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die Variabeln $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_\lambda$ und stelle die Gleichungen (68.) mit den sich ergebenden Differentialgleichungen

$$(73.)\quad \begin{cases} g_1\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \frac{\partial^{\nu+\delta} u_1}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\delta}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho_1+\sigma_1} u_m}{\partial z_1^{\varrho_1} \partial z_2^{\sigma_1}}, \frac{\partial^{\nu_1+\delta_1} u_m}{\partial z_2^{\nu_1} \partial z_3^{\delta_1}}, \ldots\Big) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \\ \qquad \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_1^\varrho \partial z_2^\sigma}, \frac{\partial^{\nu+\delta} u_1}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\delta}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho_1+\sigma_1} u_m}{\partial z_1^{\varrho_1} \partial z_2^{\sigma_1}}, \frac{\partial^{\nu_1+\delta_1} u_m}{\partial z_2^{\nu_1} \partial z_3^{\delta_1}}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

zusammen; ***sind die Gleichungen*** (73.) ***von einander unabhängig,*** so kann man mit Hülfe der Gleichungen (68.) und der nach $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ genommenen Differentialquotienten dieser Gleichungen die Grössen $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}$ sowie sämmtliche nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ genommenen Differentialquotienten dieser Grössen eliminiren und erhält ein partielles Differentialgleichungsystem der Form

$$(74.)\quad \begin{cases} h_1\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \\ \qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_\alpha}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots\Big) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_m\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \\ \qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_\alpha}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \ldots\Big) = 0, \end{cases}$$

welches sich bekanntlich wieder in ein algebraisches partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung und höherer Klasse umsetzen lässt, in welchem die ausser $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ***vorkommenden Variabeln nur nach*** $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ ***differentiirt vorkommen, aber auch*** $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}$ ***nicht enthalten sind.***

Sind aber einige der Gleichungen (73.) von einander abhängig, so

mögen die von einander unabhängigen durch

$$(75.)\qquad g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_\varepsilon = 0$$

dargestellt sein; dann kann man zunächst mit Hülfe der Gleichungen (68.) und der nach $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ genommenen Differentialquotienten dieser Gleichungen die Grössen $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}$ sowie sämmtliche nach $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ genommenen Differentialquotienten dieser Grössen eliminiren und erhält ein partielles Differentialgleichungsystem der Form:

$$(76.)\quad \begin{cases} h_1\Big(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u_1, u_2, \dots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \dots, \\ \qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \dots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_m}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \dots\Big) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_\varepsilon\Big(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u_1, u_2, \dots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \frac{\partial u_1}{\partial z_3}, \dots, \\ \qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \dots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_m}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \dots\Big) = 0. \end{cases}$$

Stellt man nun mit diesen ε Differentialgleichungen die $m-\varepsilon$ ersten Differentialgleichungen des Systems (68.) zusammen und eliminirt aus diesen m Gleichungen durch successive Differentiation nach den Variabeln $z_2, z_3, \dots, z_\mu$ die ε Variabeln $u_{m-\varepsilon+1}, u_{m-\varepsilon+2}, \dots, u_m$ und deren nach $z_2, z_3, \dots, z_\mu$ genommene partielle Differentialquotienten, so erhält man $m-\varepsilon$ algebraische Differentialgleichungen der Form

$$(77.)\quad \begin{cases} k_1\Big(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u_1, u_2, \dots, u_{m-\varepsilon}, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots, \\ \qquad \frac{\partial u_{m-\varepsilon}}{\partial z_1}, \frac{\partial u_{m-\varepsilon}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \dots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_{m-\varepsilon}}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \dots\Big) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{m-}\Big(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u_1, u_2, \dots, u_{m-\varepsilon}, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots, \\ \qquad \frac{\partial u_{m-\varepsilon}}{\partial z_1}, \frac{\partial u_{m-\varepsilon}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial^{\varrho+\sigma} u_1}{\partial z_2^\varrho \partial z_3^\sigma}, \dots, \frac{\partial^{\nu+\tau} u_{m-\varepsilon}}{\partial z_2^\nu \partial z_3^\tau}, \dots\Big) = 0, \end{cases}$$

welche sich wiederum, wenn

$$(78.)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = v_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_{m-\varepsilon}}{\partial z_1} = v_{m-\varepsilon}$$

gesetzt wird, in ein algebraisches partielles Differentialgleichungsystem

erster Ordnung von der Form (70.) umsetzen lassen würde, was der Annahme der Irreductibilität von (68.) widerspricht. Es müssen somit die Differentialgleichungen (77.) identisch sein, und daraus ergiebt sich wieder, dass *jedes* Integralsystem von (68.) ein Elementensystem von Integralen der Differentialgleichungen (71.) bildet. Ist $\lambda = \mu$, so folgt genau wie oben für Differentialgleichungsysteme zweiter Klasse die Richtigkeit eben dieses Satzes, wenn der Grad des Differentialgleichungsystems (71.) grösser als der von (68.) ist.

Sur l'équation $x^{37}+y^{37}+z^{37} = 0$.

(Par M. *D. Mirimanoff* à Genève.)

Soit H le nombre des classes des nombres idéaux formés avec une racine primitive θ de l'équation $x^{\lambda}-1=0$, λ étant premier; dans un mémoire qui fait partie du t. 40 de ce Journal, M. *Kummer* a prouvé que l'équation $x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}=0$ est impossible en nombres entiers, si H n'est pas divisible par λ; M. *Kummer* s'est occupé ensuite du cas de $H\equiv 0 \pmod{\lambda}$ et il est parvenu à étendre son théorème à un groupe de ces λ*). Ce groupe comprend les nombres 37, 59 et 67, qui sont les seules valeurs de λ inférieures à 100 et telles que $H\equiv 0 \pmod{\lambda}$. Le raisonnement dont M. *Kummer* a fait usage dans son second mémoire repose sur quelques propriétés des indices de certaines unités complexes**).

Je ferai voir que les propriétés des unités complexes que j'ai établies dans mon précédent mémoire suffisent pour démontrer le théorème de M. *Kummer* dans le cas particulier de $\lambda = 37$.

Soit

$$(1.)\qquad x^{37}+y^{37}+z^{37} = 0.$$

Je suppose d'abord que les nombres x, y, z fassent partie du domaine d'intégrité $[\theta+\theta^{-1}]$, θ étant une racine primitive de $x^{37}-1=0$, et que le nombre z, premier à x et à y, soit divisible par $\beta=(1-\theta)(1-\theta^{-1})$.

L'équation (1.) rentre dans la classe des équations

$$(2.)\qquad x^{37}+y^{37} = \varepsilon\beta^{\varkappa}z^{37},$$

ε étant une unité quelconque du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$, $\varkappa$ un multiple de 37, x, y, z des nombres du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$, premiers entre eux et premiers à β.

Je supposerai de plus que les nombres $(x+y)^2$ et xy fassent partie du domaine $[\theta+\theta^{-1}+\theta^{g^9}+\theta^{-g^9}]$, g étant une racine primitive pour le module 37.

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1857.

**) Comp. t. 44, p. 93.

$x^{37}+y^{37}$ est égal au produit $(x+y)\prod_{i=1}^{i=18}(x^2+y^2+\delta_i xy)$, δ_i étant la période $\theta^i+\theta^{-i}$.

Le second facteur du nombre des classes n'étant pas divisible par 37, il vient

$$(3.)\qquad \begin{cases} x+y = e_0\beta^{\varkappa-18}u_0^{37} \\ (x+y)^2-(2-\delta_i)xy = e_i\beta u_i^{37} \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,18)$$

e_0, e_i étant des unités complexes et u_0, u_i des nombres existants premiers à β*).

On a pour $i=1$

$$(x+y)^2-\beta xy = e_1\beta u_1^{37}, \quad \text{puisque} \quad 2-\delta_1=\beta.$$

Posons

$$\frac{1}{e_1}=\varepsilon;\ e_1u_1=\nu_1.$$

Il viendra

$$(4.)\qquad (x+y)^2-\beta xy = \varepsilon^{36}\beta\nu_1^{37}.$$

Or l'unité ε^{36} peut être remplacée par le produit $\varepsilon_{18}^6\varepsilon_9^6\varepsilon_6^2\varepsilon_3^2\varepsilon_2$, ε^{18}, $\varepsilon_9\ldots\varepsilon_2$ étant des unités appartenant aux diviseurs 18, 9, ..., 2 du nombre 18**); parmi ces unités deux seulement font partie du domaine $[\theta+\theta^{-1}+\theta^{g^9}+\theta^{-g^9}]$, ce sont les unités ε_9 et ε_3.

Je pose $x=\varepsilon_9^3\varepsilon_3x'$; $y=\varepsilon_9^3\varepsilon_3y'$; $z=\varepsilon_9^3\varepsilon_3z'$ et

$$\frac{\varepsilon^{36}}{\varepsilon_9^6\varepsilon_3^2} = E(\theta).$$

L'équation (4.) devient

$$(5.)\qquad (x'+y')^2-\beta x'y' = E(\theta)\beta\nu_1^{37}.$$

Or $(x'+y')^2$ est divisible par 37β, ν_1^{37} est congru à un nombre entier n suivant 37; par conséquent

$$-x'y' \equiv E(\theta)n.$$

Le nombre $x'y'$ étant invariable par la substitution P_9 qui a pour effet de remplacer θ par θ^{g^9}, il viendra

$$-x'y' \equiv E(\theta^{g^9})n,$$

par conséquent

$$\frac{E(\theta)}{E(\theta^{g^9})} \equiv 1 \pmod{37}.$$

---

*) Comp. Abhandl. der Berl. Akad., 1857. p. 66 (Mémoire de M. Kummer).

**) Mon précédent mémoire, § 3.

Les unités $\frac{E(\theta)}{E(\theta^{g^r})}$, $E(\theta)$ et $E(\theta^{g^r})$ sont donc des puissances 37ièmes. (Mon précédent mémoire, § 3).

Posons

$$E(\theta)^{-\frac{1}{37}}\nu_1 = \xi.$$

L'équation (5.) devient

$$(6.) \qquad (x'+y')^2-\beta x'y' = \beta\xi^{37}.$$

J'applique à cette équation la substitution P_9; il viendra, en désignant par β'' et ξ'' les conjugées de β et ξ,

$$(7.) \qquad (x'+y')^2-\beta''x'y' = \beta''\xi''^{37}.$$

Si l'on tient compte de la première des équations (3.), on obtient, en posant $u_0^2=\zeta$ et $-\xi''=\eta$,

$$(8.) \qquad \xi^{37}+\eta^{37} = \varepsilon_0\frac{\beta'-\beta}{\beta'}\beta^{2k-37}\zeta^{37},$$

ε_0 étant une unité complexe du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$. L'équation (8.) rentre dans la classe des équations (2.) et les nombres $(\xi+\eta)^2$, $\xi\eta$ appartiennent, de même que les nombres $(x+y)^2$, xy, au domaine $[\theta+\theta^{-1}+\theta^{g^9}+\theta^{-g^9}]$.

Voici comment on pourrait prouver que cette „descente" conduit à une conclusion impossible. Remarquons qu'on a

$$\text{Mod.}(x^2+y^2+\delta_i xy) > \text{Mod.}\frac{(x+y)^2}{2}, \quad \text{pour} \quad \delta_i > 0$$

et

$$\text{Mod.}(x^2+y^2+\delta_i xy) > \text{Mod.}\frac{(x-y)^2}{2}, \quad \text{pour} \quad \delta_i < 0.$$

Or δ_i étant positif pour 9 valeurs de i, il viendra

$$\text{Mod.}(\varepsilon\beta^{\varkappa}z^{37}) > \frac{1}{2^{18}}\text{Mod.}(x+y)^{19}\text{Mod.}(x-y)^{18},$$

en vertu de l'équation (2.).

Des inégalités semblables sont données par les équations conjugées à (2.); il viendra en multipliant

$$37^{\varkappa}\text{Mod.}N(z)^{37} > \frac{1}{2^{18.18}}\text{Mod.}N(x+y)^{19}\text{Mod.}N(x-y)^{18},$$

en désignant par N la norme. Or

$$x+y = e_0\beta^{\varkappa-18}u_0^{37}, \quad u_0^2=\zeta \quad \text{et} \quad \varkappa \geqq 37,$$

par conséquent

$$(9.)\qquad \text{Mod.}N(z^{37}) > \left(\frac{37}{2}\right)^{18.18}\text{Mod.}N(\zeta^{37}).$$

Ainsi

1) le module de la norme de ζ est inférieur au module de la norme de z;

2) les modules des normes de z, ζ etc. sont toujours supérieurs à $\left(\frac{37}{2}\right)^{18.18}$.

Or la descente étant indéfinie, on obtiendra à la fin un nombre ζ tel que $\text{Mod.}N(\zeta) < \left(\frac{37}{2}\right)^{18.18}$. On a donc ce théorème:

L'équation (2.) ne peut avoir lieu, si les nombres x, y, z font partie du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$ et si les nombres $(x+y)^2$ et xy appartiennent au domaine $[\theta+\theta^{-1}+\theta^{g^9}+\theta^{-g^9}]$.

En particulier, l'équation (2.) ne peut avoir lieu, si les nombres x, y, z appartiennent au domaine $[\theta+\theta^{-1}+\theta^{g^9}+\theta^{-g^9}]$*).

Je suppose maintenant qu'aucun des nombres satisfaisant à l'équation $x^{37}+y^{37}+z^{38}=0$ ne soit divisible par $\alpha=1-\theta$. Soient η_3 la période $(\theta+\theta^{g^{12}}+\theta^{g^{24}})$ et η_6 la période $\eta_3(\theta)+\eta_3(\theta^{-1})$. Je suppose que les nombres x, y, z, premiers entre eux et premiers à $t=1-\theta$, appartiennent au domaine $[\eta_6]$. Il viendra

$$\begin{aligned} x &\equiv a \\ y &\equiv b \quad (\text{mod.}\,t^6) \\ z &\equiv c \end{aligned}$$

a, b, c étant des nombres entiers ordinaires. Le nombre $x^{37}+y^{37}$ est décomposable en 13 facteurs appartenant au domaine $[\eta_3]$:

$$x^{37}+y^{37} = (x+y)\prod_{i=0}^{i=11}(x^3+x^2y\,\eta_3(\theta^{g^i})+xy^2\eta_3(\theta^{-g^i})+y^3).$$

Il viendra, en détachant le facteur qui correspond à $i=0$,

$$x^3+x^2y\,\eta_3(\theta)+xy^2\eta_3(\theta^{-1})+y^3 = \varepsilon u_0^{37},$$

ε étant une unité du domaine $[\eta_3]$; or le nombre des classes des nombres idéaux formés avec η_3 n'est pas divisible par 37, u_0 est donc un nombre existant.

---

*) Comp. *Kummer*, Abh. d. Berl. Akad., 1857.

On peut écrire $\varepsilon u_0^{37} = e^2 \nu^{37}$, en posant $e = \varepsilon^{-18}$ et $\nu = \varepsilon u_0$; l'unité e^2 est une unité du domaine $[\eta_6]$.

Or $\nu^{37} \equiv n \pmod{37}$, n étant un nombre entier; par conséquent

$$x^3 + x^2 y \eta_3(\theta) + x y^2 \eta_3(\theta^{-1}) + y^3 \equiv e^2 n \pmod{37}.$$

Remplaçons θ par θ^{-1}, cette congruence deviendra

$$x'^3 + x'^2 y' \eta_3(\theta^{-1}) + x' y'^2 \eta_3(\theta) + y'^3 \equiv e^2 n \pmod{37},$$

x', y' étant les conjugées de x, y, et enfin

$$a^3 + a^2 b \eta_3(\theta) + a b^2 \eta_3(\theta^{-1}) + b^3 \equiv a^3 + a b^2 \eta_3(\theta^{-1}) + a b^2 \eta_3(\theta) + b^3 \pmod{t^6}.$$

Par conséquent

$$(a-b)(\eta_3(\theta) - \eta_3(\theta^{-1})) \equiv 0 \pmod{t^6}.$$

Or $\eta_3(\theta) - \eta_3(\theta^{-1})$ contient t à la troisième puissance, $a-b$ est donc divisible par 37, ce qui ne peut avoir lieu, si x, y, z sont premiers à t.

Par conséquent:

L'équation $x^{37}+y^{37}+z^{37}=0$ ne peut avoir lieu, si x, y, z sont des nombres du domaine $[\eta_6]$ premiers entre eux et premiers à $1-\theta$.

Ueber einen besonderen Fall des F^2-Gebüsches und das dazu projectivische räumliche System.

(Von Herrn *J. Cardinaal* in Tilburg.)

1. In einer früheren Arbeit habe ich versucht nachzuweisen, auf welche Weise man zu einer geometrischen Construction der Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt gelangen kann, gestützt auf deren Erzeugung durch projectivische Büschel von Flächen zweiter Ordnung*). Bei diesen Betrachtungen trat die ausserordentliche Wichtigkeit der Beziehung des F^2-Gebüsches auf ein dazu projectivisches räumliches System scharf hervor**). In dem dabei behandelten besonderen Falle trat ein F^2-Gebüsch auf, dessen Flächen einen Kegelschnitt mit einander gemein hatten. Es fragt sich nun, ob einzelne andere besondere Fälle des F^2-Gebüsches auch zur Construction anderer Oberflächen vierter Ordnung benutzt werden können. Einer der wichtigsten dieser ist der Fall, in welchem alle Flächen des Gebüsches drei und folglich alle Punkte einer Geraden mit einander gemein haben. Dieser Fall wird im Folgenden untersucht werden.

2. Es sei also gegeben ein F^2-Gebüsch, dessen Flächen die Gerade d mit einander gemein haben; diese Gerade muss betrachtet werden als die Verbindungslinie von drei gegebenen Punkten A, B, C. Einige der wichtigsten Beziehungen zwischen dem Raume Σ des Gebüsches und dem projectivischen Raume Σ_1 sind nun die nachfolgenden.

Einer Geraden l_1 von Σ_1 entspricht eine Raumcurve dritter Ordnung

*) Verslagen en Mededeelingen der Koninklyke Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde, 3e Reeks, Deel VIII.

**) Diese Beziehung wird entwickelt in den folgenden Arbeiten:

Th. Reye. Ueber Strahlen-Systeme zweiter Klasse und die *Kummer*sche Fläche vierter Ordnung (dieses Journal Bd. 86.) Derselbe. Geometrie der Lage, II. Theil, Vortrag 28 und Anhang No. 101—121 (Zweite Auflage).

k^2, von der d eine Sehne ist. Diese Raumcurve kann zerfallen: erstens in einen Kegelschnitt k^2 und eine Gerade l, die mit d und k^2 einen Punkt gemein hat; zweitens in drei Gerade d', l, l', die mit d ein räumliches Vierseit bilden, von dem l und l' sowie d und d', Gegenseiten sind.

Durch einen Punkt M von Σ ist ein F^2-Bündel des Gebüsches bestimmt, der, ausser M, noch die drei mit M associirten Punkte M', M'', M''' als Basispunkte besitzt. Hieraus ergiebt sich:

Die Hauptstrahlen des Gebüsches bestehen: erstens aus allen Geraden, die d schneiden, zweitens aus allen Geraden, die die ausserhalb d liegenden associirten Punkte verbinden, also für jeden F^2-Bündel noch aus sechs Geraden.

Jeder F^2-Bündel enthält vier Ebenenpaare, deren Doppellinien Hauptstrahlen sind, die d schneiden. Die nicht durch d gehenden Ebenen der Paare schneiden sich in sechs Hauptstrahlen der zweiten Gruppe.

3. Man denke sich nun eine Raumcurve dritter Ordnung des Gebüsches, die in eine Gerade l nebst einem Kegelschnitt k^2 zerfällt. Construirt man zwei Flächen des Gebüsches, von denen die eine, A^2, durch l und k^2 geht, und die andere, B^2, beliebig ist, so schneiden B^2 und A^2 sich, ausser in d, in einer Raumcurve dritter Ordnung, die mit l einen Punkt und mit k^2 drei Punkte gemein hat. Hieraus folgt:

Mit den Punkten auf einem Hauptstrahle l, der d schneidet, sind die Punkte eines Kegelschnitts, der sowohl l als d schneidet, associirt. Jeder Punkt auf l ist mit drei Punkten auf k^2 associirt.

Denkt man sich endlich eine Raumcurve dritter Ordnung des Gebüsches, die in drei Gerade d', l und l' zerfällt, so hat die Schnittcurve von B^2 und A^2 mit d' zwei Punkte gemein und mit l und l' je einen: hieraus folgt:

Mit einem Punkte auf einem Hauptstrahle d', der d nicht schneidet, sind ein Punkt auf d' und je ein Punkt auf den Transversalen l und l' von d und d' associirt.

Von den Flächen des Gebüsches wird d' geschnitten in den Punktepaaren einer Involution. Diese Involution ist projectivisch zu der Punktreihe auf der d' entsprechenden Geraden [illegible].

4. Die Doppellinien der vier Ebenenpaare in jedem F^2-Bündel sind Hauptstrahlen, die d schneiden, und gehören zur Kernfläche K^4 des Gebüsches. Der geometrische Ort aller dieser Doppellinien ist eine Regel-

fläche vierter Ordnung. Die Kegelflächen des Gebüsches theilen sich nämlich in zwei Gruppen ein. Die Gerade d enthält die Scheitel aller eigentlichen Kegelflächen, während die übrigen in Ebenenpaare zerfallen. Sie vertritt im Gebüsche die drei Geraden AB, BC, CA, und da diese drei Geraden auf der Kernfläche liegen, so ist d deren dreifache Gerade. Ihre Erzeugenden sind die Kerncurven der zum Gebüsche gehörenden F^2-Bündel.

5. Aus jedem Punkte von d gehen drei Erzeugende von K^4. Um sie aufzufinden wähle man als bestimmende Elemente des Gebüsches d und die Raumcurven dritter Ordnung k^3 und l^3, die d zur gemeinschaftlichen Sehne haben, lege durch k^3 zwei Flächen des Gebüsches, A^2 und B^2, und construire den F^2-Büschel durch l^3. Jede Fläche dieses Büschels bestimmt mit B^2 einen neuen Büschel, der A^2 in einem Büschel Raumcurven dritter Ordnung schneidet. Sind nun alle F^2-Büschel construirt, so ist auf A^2 ein Bündel dieser Raumcurven entstanden, die Strahlen, die einen Punkt M von d mit den vier Basispunkten eines Büschels verbinden, bestimmen je eine Kegelfläche zweiter Ordnung, zu deren Strahlen auch d gehört. Construirt man nun auf diese Weise die zu allen Büscheln des Bündels gehörigen Kegelflächen mit dem gemeinschaftlichen Scheitel M, so entsteht ein Büschel Kegelflächen. Dieser Büschel enthält drei Ebenenpaare; die Doppellinien dieser Paare werden folglich die drei Erzeugenden der Kernfläche bilden, die aus M gezogen werden können. Die Kernfläche gehört also zu den Regelflächen vierter Ordnung, bei denen aus einem Punkte der dreifachen Geraden drei Erzeugende gezogen werden können, die nicht in einer Ebene liegen.

Legt man eine Ebene φ durch d, so wird von den Kegelflächen des Gebüsches, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, eine diese Ebene längs d berühren, also bestimmt jede Ebene durch d als gemeinschaftliche Tangentialebene gleichfalls einen Büschel Kegelflächen des Gebüsches, deren Scheitel die Punkte von d sind.

6. Die Fläche vierter Klasse, deren Berührungsebenen in Σ_1 den Kegelflächen des Gebüsches entsprechen, artet aus in eine doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades. In jedem F^2-Büschel des Gebüsches giebt es zwei eigentliche Kegelflächen; sie vertreten jedoch die vier Kegelflächen eines beliebigen F^2-Büschels, sind also doppelt zu zählen. Folglich gehen durch jede Gerade von Σ_1 zwei Berührungsebenen, die diesen Kegelflächen entsprechen und die gleichfalls doppelt zu zählen sind. Diese Berührungs-

ebenen bestimmen also die doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades K_1^2. Zu jedem F^2-Bündel gehören weiter vier Ebenenpaare; construirt man wieder in Σ_1 den Punkt, der den vier Basispunkten des Bündels entspricht, so entsprechen diesen vier Ebenenpaaren vier Berührungsebenen von K_1^2; die Gesammtheit dieser Ebenen bildet also eine abwickelbare Fläche, die K_1^2 umgeschrieben ist.

Diese abwickelbare Fläche berührt K_1^2 in einer Raumcurve c_1^4, welche vierter Ordnung sein muss. Wählt man nämlich einen Punkt M_1 und construirt man aus M_1 die vier Berührungsebenen an K_1^2, so befinden sich die vier Berührungspunkte in der Polarebene μ_1 von M_1 in Bezug auf K_1^2, und in μ_1 können keine anderen Punkte von c_1^4 liegen, da μ_1 nur einen Pol M_1 besitzt. In Σ entsprechen dem Punkte M_1 die vier associirten Punkte M, M', M'', M'''; den vier Berührungsebenen die vier Ebenenpaare $|dM-M'M''M'''|$, $|dM'-MM''M'''|$, $|dM''-M'MM'''|$, $|dM'''-MM'M''|$; den sechs Schnittlinien dieser Ebenen die sechs Kanten des Tetraeders, dessen Eckpunkte M, M', M'', M''' sind, und die zum System der Hauptstrahlen, die d nicht schneiden, gehören. Die diesen Hauptstrahlen entsprechenden Strahlen des Raumes Σ_1 bilden also das Strahlensystem, das den Sehnen von c_1^4 conjugirt ist. Sie liegen in zwei Berührungsebenen der abwickelbaren Fläche, sind also ihre Doppeltangenten. Durch einen Punkt gehen sechs dieser Doppeltangenten, da in der Polarebene des Punktes sechs Sehnen von c_1^4 liegen.

7. Um die Ordnung der abwickelbaren Fläche zu bestimmen, nehme man auf d einen Punkt M an und betrachte diesen als Scheitel eines zum Gebüsche gehörenden Kegelbüschels. Diesem Büschel entspricht in Σ_1 ein Büschel Berührungsebenen von K_1^2, dessen Axe also eine Gerade p_1 von K_1^2 ist. Zum Kegelbüschel gehören drei Ebenenpaare, dreimal kommt es folglich vor, dass eine der Ebenen durch p_1 die Fläche K_1^2 in einem Punkte von c_1^4 berührt. Hieraus ergiebt sich:

Einem Punkte M von d entspricht eine Gerade p_1 von K_1^2; die Geraden, die zur nämlichen Schaar wie p_1 gehören, entsprechen also den Punkten von d. Eine Gerade dieser Schaar schneidet c_1^4 in drei Punkten, c_1^4 ist folglich eine rationale Raumcurve vierter Ordnung. Von nun an wird die Schaar der dreifachen Secanten von c_1^4 die Schaar p_1 heissen, die Schaar der einfachen Secanten von c_1^4 ist die Schaar q_1. Den Ebenen durch eine Gerade der letztgenannten Schaar entsprechen in Σ die Kegelflächen eines Büschels, die eine gemeinschaftliche Tangentialebene längs d besitzen;

von diesen Ebenen berührt eine die Fläche K_1^2 in einem Punkte von c_1^4; dieser Ebene entspricht in Σ das zu dem Büschel gehörende Ebenenpaar. Aus einem Punkte M_1 können drei Sehnen von c_1^4 gezogen werden; folglich enthält eine Ebene drei Strahlen des Systems, das den d nicht schneidenden Hauptstrahlen des Gebüsches entspricht; dieses Strahlensystem ist also dritter Klasse sechster Ordnung. Zugleich ergiebt sich, dass eine Fläche des Gebüsches drei dieser Hauptstrahlen enthält.

Man nehme jetzt eine Ebene μ_1 an, die so gewählt ist, dass sie die Curve c_1^4 berührt; von den vier Berührungsebenen, die aus dem Pol M_1 von μ_1 an die abwickelbare Fläche zu construiren sind, fallen nun zwei zusammen; ihre Schnittlinie ist der Strahl, der conjugirt ist zur Tangente von c_1^4 in ihrem Berührungspunkte mit μ_1; dieser Strahl geht also über in eine Erzeugende der abwickelbaren Fläche. Die Curve c_1^4 ist sechsten Ranges, eine Gerade l_1 wird folglich von sechs ihrer Tangenten geschnitten; gleichfalls wird die Polare l_1' von l_1 von sechs Erzeugenden der Fläche geschnitten; die Fläche ist also sechster Ordnung und wird von nun an K_1^6 heissen. K_1^6 unterscheidet sich von der gemeinsamen Developpabeln zweier Flächen zweiter Klasse dadurch, dass nur eine Fläche zweiter Klasse ihr einbeschrieben werden kann; ihre Rückkehrcurve ist der geometrische Ort der Pole der Schmiegungsebenen von c_1^4; da aus einem Punkte sechs Schmiegungsebenen von c_1^4 gezogen werden können, so liegen in einer Ebene sechs Punkte der Rückkehrcurve, die also sechster Ordnung ist.

Unter den Geraden der Schaar p_1 giebt es vier Tangenten von c_1^4; diese fallen zusammen mit Erzeugenden von K_1^6; K_1^6 schneidet also die Fläche K_1^2 in diesen Erzeugenden und berührt sie in c_1^4, welche in der Schnittcurve doppelt zählt; die Schnittcurve von K_1^2 und K_1^6 hat also im Ganzen die Ordnung zwölf.

Die Erzeugenden von K_1^6 entsprechen den Erzeugenden von K^4. Es wurde schon bemerkt, dass mit den Punktepaaren eines d nicht schneidenden Hauptstrahles d' des Gebüsches die Punkte von zwei Transversalen l und l' von d und d' associirt sind. Diese Geraden vereinigen sich zu einer Erzeugenden l von K^4, wenn dem Hauptstrahl eine Erzeugende von K_1^6 entspricht.

8. Um eine Uebersicht zu bekommen über die Abhängigkeit der Hauptstrahlen des Gebüsches und der entsprechenden Geraden in dem Raume

Σ_1, kann man die ebenen Schnittcurven von K_1^6 betrachten. Eine beliebige Ebene φ_1 schneidet K_1^6 in einer Curve f_1^6 sechster Ordnung vierter Klasse, die drei Doppeltangenten besitzt. Die Tangenten von f_1^6 entsprechen den Hauptstrahlen, die d schneiden in Verbindung mit den Kegelschnitten, die ihnen associirt sind, da durch eine dieser Tangenten eine Berührungsebene von K_1^2 und eine erzeugende Ebene von K_1^6 und durch die Gerade und den Kegelschnitt eine Kegelfläche und ein Ebenenpaar bestimmt ist. Sei nun l_1 eine solche Tangente von f_1^6, so entsprechen ihren beiden Schnittpunkten mit K_1^2 zwei Punkte auf d, diese sind die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden l und des dazu associirten Kegelschnittes l^2 mit d. Der Berührungspunkt von l_1 mit f_1^6 muss als die Vereinigung von zwei Schnittpunkten betrachtet werden, ihm entspricht der Schnittpunkt von l mit l^2. Ausserdem schneidet l_1 die Curve f_1^6 noch in vier Punkten, diesen entsprechen die vier Punkte, die l^2, ausser den Punkten $\overline{l^2 d}$ und $\overline{ll^2}$, mit K^4 gemein hat. Den vier Tangenten, die aus einem Punkte M_1 an f_1^6 zu ziehen sind, entsprechen die vier d schneidenden Hauptstrahlen auf der φ_1 entsprechenden Fläche F^2, die durch die M_1 entsprechenden vier associirten Punkte M, M', M'', M''' gezogen werden können. Der Kegelschnitt k_1^2, in dem φ_1 die Fläche K_1^2 schneidet, berührt f_1^6 in vier Punkten; die Tangenten in diesen Punkten entsprechen den Hauptstrahlen von Σ, bei welchen der ihnen associirte Kegelschnitt durch ihren Schnittpunkt mit d geht.

Es sei nun die Ebene φ_1 eine Berührungsebene von K_1^2 in einem Punkte A_1, der nicht auf c_1^4 liegt. Dieser Ebene entspricht eine Kegelfläche F^2 des Gebüsches, deren Scheitel A auf d liegt. Der Kegelschnitt K_1^2 zerfällt in zwei Gerade, von denen die eine, k_1, zur Schaar p_1 gehört und eine dreifache Tangente von f_1^6 ist, während die zweite, l_1, zur Schaar q_1 gehört und eine einfache Tangente von f_1^6 ist. Den Tangenten von f_1^6 entsprechen die Strahlen der Kegelfläche F^2; aus jedem Punkte von k_1 geht noch eine dieser Tangenten, ihrem Schnittpunkte mit l_1 entspricht der Schnittpunkt von d mit dem Kegelschnitte, der zu dem entsprechenden Strahle von F^2 associirt ist.

Man kann sich jetzt die Ebene φ_1 beweglich denken; dreht sich erstens φ_1 um l_1 und construirt man in jeder Ebene die Tangenten von f_1^6, so sind die entsprechenden Hauptstrahlen die Strahlen aller Kegelflächen, die in d eine gemeinschaftliche Tangentialebene besitzen. Dreht zweitens φ_1 sich um k_1, so kann man in jeder Ebene die Tangenten an die zuge-

hörige Schnittcurve construiren und bekommt dann die Strahlen, deren entsprechende alle Hauptstrahlen aus einem Punkte A von d sind.

Es sei endlich φ_1 eine Berührungsebene von K_1^2 in einem Punkte A_1 von c_1^4 und also eine erzeugende Ebene von K_1^6. Der Ebene φ_1 entspricht jetzt eine Ebene φ durch d und die Ebene φ', die mit φ eine besondere Fläche des Gebüsches bildet; φ und φ' schneiden sich in einer Erzeugenden e von K^4, die d in A schneidet. Die Schnittcurve f_1^6 zerfällt in eine Curve vierter Ordnung dritter Klasse f_1^4 und die Erzeugende e_1 von K_1^6, die doppelt zu zählen ist und f_1^4 berührt; die Gerade k_1 wird zur Doppeltangente von f_1^4 und schneidet e_1 in A_1; dieser Punkt A_1 ist zugleich der Berührungspunkt von l_1 und der Fläche K_1^6. Durch A_1 geht weiter noch die Tangente t_1 von c_1^4; letztgenannte Gerade bildet mit k_1, l_1, e_1 einen harmonischen Büschel, in dem t_1 zu e_1 conjugirt ist.

Einer Geraden g_1 in φ_1 entspricht eine Gerade g in φ, die d in einem Punkte B und die Erzeugende e von K^4 in C schneidet. Dem Punkte B entspricht sowohl der Schnittpunkt $g_1 l_1 = B_1$ als die nicht in φ_1 liegende Gerade der Schaar p_1, die g_1 in B_1 schneidet; dem Punkte C der Schnittpunkt von g_1 und e_1. Da mit g ein Kegelschnitt g^2, der durch A und C geht, associirt ist, so entsprechen allen Geraden von φ_1 alle Geraden von φ und die dazu associirten Kegelschnitte. Hieraus folgt:

a) Gehen die Geraden in φ_1 durch einen festen Punkt B_1 von l_1, so gehen die entsprechenden Geraden durch einen festen Punkt B von d.

b) Sind die Geraden zugleich Tangenten von f_1^4, so sind es Doppeltangenten von K_1^6. Ihnen entsprechen Gerade, die associirt sind mit einem Kegelschnitt, der in zwei Gerade zerfällt, von denen eine d schneidet und die andere d nicht schneidet.

c) Gehen die Geraden durch A_1, so entsprechen diesen die Strahlen eines Büschels durch A.

d) φ' wird von K^4, ausser in e, in einer unicursalen Curve dritter Ordnung c^3 geschnitten; c^3 und e entsprechen der Schnittcurve von φ_1 mit K_1^6. Den vier Schnittpunkten der Geraden g_1 mit f_1^4 entsprechen die vier Schnittpunkte, die g^2, ausser dem Doppelpunkte, mit c^3 gemein hat.

9. Einer Geraden l in Σ entspricht in Σ_1 ein Kegelschnitt l_1^2, der K_1^6 in vier Punkten berührt, die den Schnittpunkten von l und K^4 entsprechen. Um diese genauer zu bestimmen, bringe man durch l die Fläche F^2 des Gebüsches, der eine Ebene φ_1 entspricht, welche K_1^6 in der Curve f_1^6 schneidet.

Den Erzeugenden von F^2, die mit d zu derselben Schaar gehören, entsprechen die vierfach berührenden Kegelschnitte von f_1^6.

Einer Ebene φ von Σ entspricht eine Fläche, die von einer Geraden l_1 in so viel Punkten geschnitten wird als die Ebene φ von der l_1 entsprechenden Curve l^3. Diese Fläche F_1^3 ist also dritter Ordnung, sie ist ausserdem eine Regelfläche; man kann sich nämlich φ entstanden denken durch den Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Schnittpunkt A von φ und d ist; den Strahlen dieses Büschels entsprechen die Erzeugenden von F_1^3; ihre einfache Leitgerade ist die A entsprechende Gerade a_1 der Schaar p_1. Die Doppelgerade von F_1^3 entspricht dem in φ liegenden, d nicht schneidenden Hauptstrahle. K^4 schneidet weiter φ in einer Curve vierter Ordnung f^4 mit dreifachem Punkte A, welche von einer Fläche des Gebüsches wieder in fünf Punkten geschnitten wird; F_1^3 berührt folglich K_1^6 in einer Curve fünfter Ordnung.

Geht φ durch eine oder zwei Erzeugende von K^4, so gehören eine oder zwei Erzeugende von K_1^6 zu den Erzeugenden von F_1^3.

10. Wir gehen jetzt über zu den besonderen Fällen des Gebüsches und untersuchen zuerst, welche Aenderungen in den gefundenen Resultaten eintreten, wenn alle Flächen des Gebüsches einen Punkt A mit einander gemein haben.

Alle Geraden durch A sind in diesem Falle Hauptstrahlen; schneiden sie dazu noch d, so sind sie Hauptstrahlen, die mit K^4 mehr als vier Punkte gemein haben, da A ein Doppelpunkt von K^4 ist; also gehört die Ebene $Ad = \alpha$ zur Kernfläche K^4, die folglich zerfällt in α und die Regelfläche dritter Ordnung K^3 mit der Doppelgeraden d. In Σ_1 entspricht dieser Fläche, ausser K_1^2, eine abwickelbare Fläche dritter Klasse vierter Ordnung K_1^4. Die Curve c_1^4 zerfällt in eine Raumcurve dritter Ordnung c_1^3 und eine Gerade a_1, die zur Schaar q_1 gehört, also c_1^3 in einem Punkte schneidet; die Geraden der Schaar p_1 sind Sehnen von c_1^3.

11. Nimmt man in Σ einen Punkt M an, und construirt man den F^2-Bündel, den dieser Punkt bestimmt, so sind A und die beiden Punkte M' und M'' mit M associirt; Ad ist eine Ebene, zu einem der vier Ebenenpaare gehörend; diesen Ebenenpaaren entsprechen in Σ_1 eine Ebene durch a_1 und drei Ebenen, die K_1^2 in Punkten von c_1^3 berühren. Allen Ebenen durch a_1 entsprechen also die Ebenenpaare, zu denen Ad gehört; da diese Ebenen einen Büschel bilden, so bilden auch die entsprechenden Ebenen-

paare des Gebüsches einen Büschel, dessen Axe eine nicht in Ad liegende Gerade ist. Eine dieser Ebenen bildet mit Ad ein Paar, dessen Doppellinie durch A geht; diesem Ebenenpaar entspricht die Ebene α_1, die K_1^2 in dem Schnittpunkt von a_1 und c_1^3 berührt.

Weiter ist die Punktreihe, die die Ebenen des Büschels auf d bestimmen, projectivisch zur Punktreihe, die die Geraden der Schaar p_1 auf a_1 bestimmen. Der Punkt A gehört zur Fläche K^3; die Berührungsebenen aus ihm an K^3 bilden eine Kegelfläche zweiter Klasse.

12. Wie im allgemeinen Falle kann jetzt die Abhängigkeit der Hauptstrahlen des Gebüsches und der Geraden von Σ_1 untersucht werden. Es muss dabei beachtet werden, dass es im Gebüsche drei Arten von Hauptstrahlen giebt; Hauptstrahlen durch A, Hauptstrahlen, die d schneiden, und Hauptstrahlen, die d nicht schneiden.

Man nehme wieder eine Ebene φ_1 an; diese schneide a_1 in einem Punkte A_1 und K_1^4 in einer Curve f_1^4 vierter Ordnung dritter Klasse, die eine Doppeltangente besitzt. Die Tangenten an f_1^4 entsprechen den Hauptstrahlen, die d schneiden; unter diesen giebt es jedoch die Doppeltangente und drei Tangenten aus A_1, von denen eine in der Ebene α_1 liegt. Die letzteren gehören zu den Geraden, die aus A_1 in φ_1 gezogen werden können. Diese Geraden sind Schnittlinien von Ebenen durch a_1 mit φ_1; ihnen entspricht also die Schnittlinie von Ad mit der φ_1 entsprechenden Fläche des Gebüsches F^2. Dieser Schnittlinie, die ein Hauptstrahl ist, die durch A geht und d schneidet, sind also die Kegelschnitte eines Ebenenbüschels associirt; in besonderen Fällen kann der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfallen, von denen die eine d schneidet. Diesen besonderen Fällen entsprechen nun die Tangenten aus A_1 an f_1^4, die nicht in der Berührungsebene α_1 liegen; der letztgenannten Tangente entspricht ein Kegelschnitt in der Ebene des Ebenenbüschels, der durch A geht. Hieraus ergiebt sich:

Auf einer Fläche des Gebüsches giebt es drei Hauptstrahlen des Gebüsches, die d nicht schneiden; demjenigen, der durch A geht, entspricht eine Doppeltangente von K_1^4; denjenigen, die nicht durch A gehen, entsprechen Tangenten aus Punkten von a_1 an K_1^4. Den Geraden, die durch A gehen und d schneiden, in Verbindung mit den ihnen associirten Kegelschnitten, entsprechen die Geraden, die a_1 schneiden. Die Schnittcurve von φ_1 und K_1^2 geht durch A_1 und berührt f_1^4 in drei Punkten.

Wird φ_1 zu einer Berührungsebene von K_1^2 in einem Punkte A_1, der

nicht zu c_1^3 gehört, so ist F^2 eine Kegelfläche des Gebüsches. Der Kegelschnitt k_1^2 zerfällt wieder in zwei Gerade, von denen die eine eine Tangente von A_1 an f_1^4 ist und die andere ihre Doppeltangente.

Wird φ_1 endlich zu einer Berührungsebene in einem Punkte von c_1^3, so zerfällt F^2 in zwei Ebenen φ und φ', von denen φ durch d und φ' durch A geht. Die Schnittcurve mit K_1^4 zerfällt in einen Kegelschnitt f_1^2 und eine Erzeugende von K_1^4, die also in der Schnittcurve doppelt zählt. Aus dem Berührungspunkt gehen eine Gerade der Schaar p_1 und eine der Schaar q_1.

In allen diesen Fällen ist es nicht schwierig, in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden die Strahlen des Systems zu construiren, die den Hauptstrahlen des Gebüsches entsprechen.

13. Einer Geraden g von Σ entspricht ein Kegelschnitt g_1^2. Dem Schnittpunkte von g mit der Ebene Ad muss ein Punkt entsprechen, in welchem g_1^2 jede Ebene durch a_1 berührt, also ein Punkt von a_1. g_1^2 geht folglich durch einen Punkt von a_1 und berührt K_1^4 in drei Punkten.

Einer Ebene φ von Σ entspricht eine Regelfläche dritter Ordnung F_1^3, welche eine Gerade der Schaar p_1 als einfache Leitgerade enthält; a_1 ist eine Erzeugende von F_1^3, da φ die Ebene Ad in einer Geraden schneidet, deren Punkten die Punkte von a_1 entsprechen. F_1^3 berührt weiter K_1^4 in einer Raumcurve vierter Ordnung.

Geht φ durch A, so wird die Ordnung von F_1^3 um Eins vermindert, und F_1^3 zerfällt in eine Fläche zweiter Ordnung F_1^2 und die Ebene α_1. F_1^2 geht durch eine Gerade der Schaar p_1 und berührt K_1^4 in einer Curve dritter Ordnung; α_1 ist also zugleich der geometrische Ort aller Punkte von Σ_1, die A doppelt entsprechen. Von einer Geraden l_1 wird F_1^2 in zwei Punkten geschnitten; diesen entsprechen die beiden Punkte, in denen die l_1 entsprechende Raumcurve l^3 die Ebene φ, ausser in A, schneidet.

14. Haben alle Flächen des Gebüsches zwei gemeinschaftliche Punkte A und B, so gehören alle Geraden durch A und B, die d schneiden, zur Kernfläche K^4, die also in die Ebenen Ad und Bd und die Fläche zweiter Ordnung K^2 zerfällt. Dieser Regelfläche K^2 entspricht eine abwickelbare Fläche zweiter Klasse, also eine Kegelfläche L_1^2, die ein Berührungskegel von K_1^2 ist. In Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden entsprechen den Ebenen Ad und Bd, in Verbindung mit zwei Ebenenbüscheln, die Ebenen durch zwei Gerade a_1 und b_1, die zur Schaar q_1 von K_1^2 gehören. Die Curve c_1^4 zerfällt also in den Kegelschnitt c_1^2 und die Geraden a_1 und b_1.

Nimmt man in Σ einen Punkt M an, so ist mit M, ausser A und B, ein Punkt M' associirt. In einem F^2-Bündel giebt es also zwei Ebenenpaare, deren je eine Ebene Ad oder Bd ist, und zwei Ebenenpaare, deren je eine Ebene die Gerade AB enthält. Hieraus folgt:

Den Berührungsebenen von L_1^2 entsprechen die Ebenenpaare, von welchen Ad oder Bd keine Ebene ist; sie bilden in Σ zwei projectivische Büschel durch d und AB, deren homologe Ebenen K^2 erzeugen. Den Ebenenbüscheln durch a_1 und b_1 entsprechen die Ebenenpaare, von denen Ad oder Bd je eine Ebene ist; die zu diesen Ebenen gehörenden Ebenen der Paare bilden zwei Ebenenbüschel.

Durch die Gerade AB ist ein F^2-Bündel bestimmt; ihr entspricht der Scheitel S_1 der Kegelfläche L_1^2.

Den Ebenen Ad und Bd, in Verbindung mit den Ebenen der Büschel, die durch A oder B gehen, entsprechen die Berührungsebenen α_1 und β_1, die durch a_1 und b_1 an L_1^2 gelegt werden können.

15. Nimmt man wieder in Σ_1 eine Ebene φ_1 an, so schneidet diese die Kegelfläche L_1^2 in einem Kegelschnitt f_1^2 und die Geraden a_1 und b_1 in zwei Punkten A_1 und B_1. Ganz wie im vorigen Falle kann man nun die Geraden von φ_1 bestimmen, die den Hauptstrahlen auf der entsprechenden Fläche F^2 entsprechen. Unter den Tangenten von f_1^2 giebt es die besonderen Tangenten, durch A_1 und B_1 gezogen, von denen je eine in den Ebenen α_1 und β_1 liegt; zugleich ist die Doppeltangente der Schnittcurve übergegangen in die Verbindungslinie A_1B_1. Hieraus ergiebt sich:

Den Tangenten der Kegelfläche L_1^2, die a_1 oder b_1 schneiden, entsprechen die Hauptstrahlen, die durch B oder A gehen.

Den Geraden, die a_1 und b_1 schneiden, entsprechen die Hauptstrahlen, die d nicht schneiden und nicht durch A oder B gehen; diese Hauptstrahlen schneiden also die Axen der zu Ad und Bd gehörenden Ebenenbüschel.

Den Tangenten der Kegelfläche L_1^2, die a_1 oder b_1 nicht schneiden, entsprechen die Hauptstrahlen, die d schneiden.

Den Ebenen durch S_1 entsprechen Flächen des Gebüsches durch die Gerade AB; zwei dieser Ebenen schneiden sich in einer Geraden durch S_1, der also eine Gerade entspricht, die sowohl d als AB schneidet.

16. Einer Geraden g von Σ entspricht ein Kegelschnitt g_1^2, der L_1^2 in zwei Punkten berührt und mit a_1 und b_1 einen Punkt gemein hat. Einer Ebene φ in Σ entspricht eine Regelfläche dritter Ordnung F_1^3, die L_1^2 in

einer Raumcurve dritter Ordnung berührt; die einfache Leitgerade von F_1^3 ist eine dem Schnittpunkte $\overline{\varphi d}$ entsprechende Gerade der Schaar p_1; a_1 und b_1 gehören zu den Erzeugenden; φ enthält weiter eine Gerade, die d und AB schneidet, also geht F_1^3 durch S_1. Geht φ durch A oder B, so zerfällt F_1^3 in die Berührungsebene α_1 oder β_1 und eine Regelfläche zweiter Ordnung F_1^2. Diese letzte berührt L_1^2 in einem Kegelschnitt, welcher durch den Berührungspunkt von L_1^2 mit der dem Punkte $\overline{\varphi d}$ entsprechenden Geraden geht.

17. Die Aenderungen, die eintreten, wenn die Flächen des Gebüsches drei gemeinschaftliche Punkte A, B, C besitzen, lassen sich nun ohne Mühe ableiten.

Die Kernfläche K^4 zerfällt in die vier Ebenen Ad, Bd, Cd, und ABC.

Die Curve c_1^4 zerfällt in die drei Geraden a_1, b_1, c_1 der Schaar q_1, und die Gerade d_1 der Schaar p_1.

Dem Ebenenbüschel durch d_1 entspricht der Ebenenbüschel durch d, in Verbindung mit ABC.

Den Ebenen durch a_1 entsprechen die Ebenenpaare, gebildet von Ad und dem Büschel durch BC. Gleichfalls den Ebenen durch b_1 und c_1 die Ebenen Bd und Cd, in Verbindung mit den Büscheln durch AC und AB.

Die Hauptstrahlen des Gebüsches theilen sich ein in diejenigen, die d schneiden, und die Strahlen, die durch A, B und C gehen. Den ersteren entsprechen die Geraden, die d_1 schneiden, den letzteren die Geraden, die b_1 und c_1, a_1 und c_1 oder a_1 und b_1 schneiden. Die erzeugenden Ebenen der Fläche K_1^6 zerfallen in die drei Ebenenbüschel durch a_1, b_1, c_1 und denjenigen durch d_1. Diesen Büscheln entsprechen erstens die Ebenen Ad, Bd, Cd, in Verbindung mit den Büscheln durch BC, AC, AB, und zweitens die Ebene ABC, in Verbindung mit dem Büschel durch d. Die Schnittcurve von K_1^6 mit einer Ebene zerfällt in vier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1. Den sechs Verbindungsgeraden dieser Punkte entsprechen die drei Paare Hauptstrahlen auf der entsprechenden Fläche des Gebüsches, die durch A, B und C gehen.

18. Einer Geraden g entspricht ein Kegelschnitt g_1^2, der a_1, b_1, c_1 und d_1 in einem Punkte schneidet. Einer Ebene φ entspricht eine Regelfläche F_1^3 dritter Ordnung, deren einfache Leitgerade eine Gerade der Schaar p_1 ist; a_1, b_1, c_1 sind Erzeugende, d_1 ist die Doppelgerade. Durch eine Gerade der Schaar p_1 und zwei Punkte ist also F_1^3 bestimmt. Sind drei

Punkte M_1, N_1, P_1, von F_1^3 gegeben, so schneidet die Ebene $M_1N_1P_1$ die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 in vier Punkten A_1, B_1, C_1, D_1, die mit den gegebenen die Schnittcurve der Ebene $M_1N_1P_1$ mit F_1^3 bestimmen. D_1 ist der Doppelpunkt dieser Curve, die K_1^2 noch in einem Punkte schneidet, der $\overline{\varphi d}$ entspricht. Geht φ durch A, so zerfällt F_1^3 in die Fläche zweiten Grades F_1^2 und die Ebene $\overline{a_1d_1} = \alpha_1$. F_1^2 enthält b_1, c_1, d_1 und eine Gerade der Schaar p_1. Geht φ durch A und B, so zerfällt F_1^3 in drei Ebenen, α_1, β_1 und eine Ebene, die durch c_1 und eine Gerade der Schaar p_1 gelegt ist.

19. Die besonderen Fälle, die den Gegenstand dieser Arbeit bilden, spielen eine Rolle in der Theorie der Oberflächen vierter Ordnung. So wie nämlich das F^2-Gebüsch, dessen Flächen einen Kegelschnitt mit einander gemein haben, verwerthet wird bei der geometrischen Construction der Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, so kann das im Vorigen behandelte Gebüsch angewendet werden bei der Construction von Oberflächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden. Diese Anwendung wird für spätere Arbeiten vorbehalten.

Die Resultate der obigen geometrischen Betrachtungen habe ich kurz zusammengefasst und benutzt zu einer geometrischen Theorie der Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelgeraden; diese Arbeit wird in Kurzem von der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam publicirt werden.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

(Fortsetzung von Band 106, Seite 314 dieses Journals.)

(Von Herrn *Paul Schafheitlin* in Charlottenburg.)

In meiner Arbeit über lineare Differentialgleichungen in Band 106, S. 285—314 dieses Journals habe ich in den Sätzen I—IX das Verhalten der Lösungen der behandelten Differentialgleichungen an den singulären und nichtsingulären Stellen im allgemeinen untersucht. Durch Einführung einer zweckmässigeren Bezeichnungsweise für die m-fach reducirte Normalform kann — wie in den folgenden Zeilen zuerst gezeigt werden soll — die Anzahl dieser Sätze verringert und dadurch die Uebersichtlichkeit erhöht werden. Ferner sind durch obige Sätze diejenigen Fälle noch nicht erledigt worden, in denen gewisse Elemente der Normalform selbst oder deren Differenzen ganze Zahlen sind. Die Ausfüllung dieser Lücke — zunächst für einfach singuläre Punkte — ist der eigentliche Zweck der vorliegenden Arbeit. Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind selbstverständlich schon in den allgemeineren Untersuchungen von Herrn *Fuchs* enthalten; einerseits aber ist die Ableitung eine durchaus verschiedene und andererseits treten die Resultate für diese besonderen Differentialgleichungen in übersichtlicherer Form auf, als es bei der allgemeineren des Herrn *Fuchs* (dieses Journal Bd. 68) möglich war.

§ 1.

Jede Differentialgleichung, bei welcher der Grad des Coefficienten der höchsten Ableitung um m Einheiten grösser ist als der Grad der Ableitung selbst, ist enthalten unter:*)

$$(\mathrm{R.})\qquad \sum_{p=0}^{n-m} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^{\nu} \mathfrak{B}(n-m-p,\ \varepsilon_{n-\nu}-m)\mathfrak{K}_{\nu} x^{m+p-\nu} = 0.$$

*) Siehe meine Arbeit dieses Journal Bd. 106, S. 299. Alle auf diese Arbeit bezüglichen Citate sollen fortan durch (I.) gekennzeichnet werden.

Setzt man hierin n an Stelle von $n-m$, so geht (R.) über in:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n+m-\nu}-m)\mathfrak{K}_\nu x^{m+p-\nu} = 0.$$

Statt der Grössen $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ wird man zweckmässig $\varepsilon_{\varrho\sigma}-m$ die Elemente dieser Differentialgleichung nennen und dieselben wieder kurz mit dem Buchstaben ε bezeichnen, so dass man als *Normalform der m-fach reducirten Differentialgleichungen nter Ordnung* erhält:

$$(\mathrm{N}^m.)\qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n+m-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{m+p-\nu} = 0.$$

Für (R.) gelten die Formeln (I. 58); aus denselben ergiebt sich für $\frac{m(m+1)}{2}$ Elemente von (N^m.):

$$(1.)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{n+\nu,n+1} = 0, \\ \varepsilon_{n+\nu,n+2} = -1, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varepsilon_{n+\nu,n+\nu} = -(\nu-1). \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, m)$$

Die Recursionsformeln für die in Potenzreihen von x entwickelbaren Lösungen von (R.) folgen aus (I. 60), wenn darin die rechten Seiten gleich Null gesetzt werden; für (N^m.) ergeben sich daraus die Formeln:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=m-\lambda}^{m+n} (-1)^\nu \Pi(\nu+\lambda-m)(\varepsilon_{n+m-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n+m-\nu,2}+\lambda)\dots \\ \qquad\qquad \dots(\varepsilon_{n+m-\nu,n+m-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu+\lambda-m} = 0, \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, m-1) \\ \sum_{\nu=0}^{m+n} (-1)^\nu \frac{\Pi(\nu+\lambda-m)}{\Pi(\lambda-m)} (\varepsilon_{n+m-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n+m-\nu,2}+\lambda)\dots \\ \qquad\qquad \dots(\varepsilon_{n+m-\nu,n+m-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu+\lambda-m} = 0 \quad (\lambda \geqq m). \end{cases}$$

Für die Lösungen der Gleichungen (N.) und (N^m.) lassen sich die Sätze I—VIII meiner früheren Arbeit (I. S. 308) folgendermassen zusammenfassen:

I. *Sämmtliche Lösungen von* (N.) *und* (N^m.) *sind in der Umgebung eines beliebigen Punktes a eindeutig und stetig, mit Ausnahme der Punkte $a = k_1,\ k_2 \dots$ und ∞. Diese Punkte sind die singulären Punkte von* (N.) *und* (N^m.).

II. *Für jeden im Endlichen liegenden μ-fach singulären Punkt k_ν von* (N.) *und* (N^m.) *giebt es im allgemeinen und mindestens $n-\mu$ von einander unab-*

hängige Lösungen, welche in seiner Umgebung eindeutig und stetig sind, vorausgesetzt dass der Coefficient der $(n-p)$*-ten Ableitung durch* $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ *theilbar ist für* $p<\mu$*; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich keine Lösung von* (N.) *und* (N'''.) *in eine ins Unendliche fortschreitende Potenzreihe von* $x-k_\nu$ *entwickeln.*

III. *Für jeden im Endlichen liegenden* μ*-fach singulären Punkt* k_ν *von* (N.) *und* (N'''.) *giebt es* μ *von einander unabhängige Lösungen der Form:*

$$(3.)\qquad y = (x-k_\nu)^{n-\mu-\varepsilon^{k_\nu}_{\mu,\sigma}}\mathfrak{P}_\sigma(x-k_\nu), \qquad (\sigma=1,2,\dots,\mu)$$

vorausgesetzt dass die Elemente $\varepsilon^{k_\nu}_{\mu,\sigma}$ *selbst als auch die Differenzen* $\varepsilon^{k_\nu}_{\mu,\varrho}-\varepsilon^{k_\nu}_{\mu,\sigma}$ *für alle verschiedenen Werthe von* ϱ *und* σ *keine ganzen Zahlen oder Null sind, und dass der Coefficient der* $(n-p)$*-ten Ableitung durch* $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ *theilbar ist für* $p<\mu$.

§ 2.

Ist:

$$(4.)\qquad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^py}{dx^p}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{R}_\nu x^{p-\nu} = \mathfrak{P}(x),$$

so gelten nach dem Zusatz (I. S. 309) für die Lösungen von (4.) die obigen Sätze I—III; indessen bedarf dieser Zusatz einer Beschränkung.

Setzt man:

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^\lambda$$

und

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x^\lambda$$

so gelten für a_λ die Recursionsformeln (I. 50):

$$(5.)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda}\cdot(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}+\lambda)\dots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{R}_\nu a_{\nu+\lambda} = b_\lambda.$$

Ist der Nullpunkt keine singuläre Stelle, so ist $\mathfrak{R}_n \lesseqgtr 0$ und es lassen sich alsdann, nachdem $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ willkürlich gewählt sind, die übrigen a_λ successive aus (5.) berechnen; die Convergenz der entstehenden Reihen ist in (I. § 5) bewiesen worden.

Ist der Nullpunkt eine einfach singuläre Stelle, so ist $\mathfrak{R}_n=0$, $\mathfrak{R}_{n-1}\lesseqgtr 0$; man kann dann $n-1$ als obere Grenze für ν in (5.) annehmen, und es werden wieder nach willkürlicher Wahl von $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ die übrigen Coefficienten aus (5.) berechnet. Wenn aber $\varepsilon_{1,1}=-p$ ist, wo p eine posi-

tive ganze Zahl bedeutet, so fehlt in der Recursionsformel für b_p der Coefficient a_{n+p-1}, und es kann dann der Fall eintreten, dass diese Recursionsformel selbst unrichtig wird oder mit den vorhergehenden in Widerspruch geräth. Als Beispiel diene:

$$\varepsilon_{n,1} = \varepsilon_{n-1,1} = \cdots = \varepsilon_{1,1} = -p.$$

In diesem Falle verschwindet die ganze linke Seite, während die rechte den Werth b_p besitzt. Genügt $\varepsilon_{1,1}$ obiger Bedingung nicht, so bringt jede folgende Recursionsformel einen neuen Coefficienten a hinzu, und es kann dann kein Widerspruch auftreten.

Ist der Nullpunkt ein μ-fach singulärer Punkt, so ist (I. S. 308):

$$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_{n-1} = \cdots = \mathfrak{K}_{n-\mu+1} = 0; \ \mathfrak{K}_{n-\mu} \lesseqgtr 0.$$

Man übersieht leicht, dass alsdann ein Widerspruch nur möglich ist, wenn ein Element der μten Gruppe $\varepsilon_{\mu,\sigma}$ eine negative ganze Zahl ist.

Ist

$$(6.) \qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{dx^\nu} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-p, \ \varepsilon_{n+m-\nu}) \mathfrak{K}_\nu x^{m+p-\nu} = \mathfrak{P}(x),$$

so führt eine analoge Betrachtung der Recursionsformeln (2.), wenn die rechte Seite derselben den Grössen b_λ gleich gesetzt wird, zu einem ganz entsprechenden Resultate, das in folgendem Satze Ausdruck findet:

IV. *Für die Lösungen von* (4.) *und* (6.) *gelten im allgemeinen die Sätze* I—III; *wenn jedoch* $\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}$ *resp.* $\varepsilon_{\mu,\sigma}^{k_\nu}$ *eine negative ganze Zahl mit Einschluss der Null ist, so können die Sätze* II *und* III *ihre Gültigkeit verlieren.*

§ 3.

Es soll nun das Verhalten der Integrale von (N.) an einem einfach singulären Punkte untersucht werden; der Einfachheit halber lege man den Nullpunkt der Coordinatenebene in diesen Punkt. Dann werden nach (II.) $n-1$ Integrale von (N.) in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig, endlich und stetig sein, während das $n$te Integral nach (III.) die Form

$$y = x^{n-1-\varepsilon_{11}} \mathfrak{P}(x)$$

besitzt, vorausgesetzt dass ε_{11} keine ganze Zahl ist.

Wenn die letzte Bedingung nicht erfüllt ist, so treten bekanntlich Logarithmen auf; es kann dies wie folgt bewiesen werden.

Ist $\varepsilon_{1,1}$ keine negative ganze Zahl, so giebt es nach (IV.) stets eine in der Umgebung des Nullpunktes eindeutige und stetige Function $\eta(x)$,

welche der Differentialgleichung (4.) genügt. Eine zweite Lösung $\zeta(x)$ von (4.) möge die Form:

$$(7.)\qquad \zeta(x) = \varphi(x)\log x$$

besitzen, wo φ eine für $x=0$ reguläre Function bedeutet; dann ist:

$$\frac{d^p\zeta}{dx^p} = \frac{d^p\varphi}{dx^p}\cdot\log x + \sum_{\varrho=0}^{p-1}(-1)^{p+\varrho-1}\frac{\Pi p}{(p-\varrho)\Pi\varrho}\,\frac{1}{x^{p-\varrho}}\cdot\frac{d^\varrho\varphi}{dx^\varrho}.$$

Setzt man diesen Werth in (4.) ein, so erhält man:

$$(8.)\quad \begin{cases} \log x \sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{d^p\varphi}{dx^p}\sum\limits_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{p-\nu} \\ +\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{\nu=0}^{p}\sum\limits_{\varrho=0}^{p-1}(-1)^{p+\varrho+\nu-1}\dfrac{\Pi p}{(p-\varrho)\Pi\varrho}\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{\varrho-\nu}\dfrac{d^\varrho\varphi}{dx^\varrho} = \mathfrak{P}(x). \end{cases}$$

Da die rechte Seite eine Potenzreihe von x ist, so muss der Factor von $\log x$ in (8.) verschwinden, d. h. $\varphi(x)$ ist eine Lösung von (N.); aus demselben Grunde müssen die negativen Potenzen von x in (8.) verschwinden. Es sei:

$$(9.)\qquad \varphi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^\lambda,$$

so genügen die Coefficienten a_λ den Recursionsformeln (I. 48), und es ist:

$$(10.)\qquad \frac{d^\varrho\varphi}{dx^\varrho} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Pi(\lambda+\varrho)}{\Pi\lambda}a_{\lambda+\varrho}x^\lambda.$$

Damit die negativen Potenzen von x verschwinden, folgt aus (8.) und (10.):

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu-\varrho-1}(-1)^{p+\varrho+\nu-1}\frac{\Pi p\,\Pi(\lambda+\varrho)}{(p-\varrho)\Pi\varrho\,\Pi\lambda}\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\varrho}x^{\lambda+\varrho-\nu} = 0.$$

Setzt man:

$$\varrho' = \nu-\varrho \quad\text{und}\quad \lambda' = \nu-\varrho-\lambda,$$

vertauscht alsdann die Summationsordnung und lässt die Striche wieder fort, so folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=\lambda}^{n}\sum_{p=\nu}^{n}\sum_{\varrho=\lambda}^{\nu}(-1)^{p+\varrho-1}\frac{\Pi p\,\Pi(\nu-\lambda)}{(p-\nu+\varrho)\Pi(\nu-\varrho)\Pi(\varrho-\lambda)}\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu a_{\nu-\lambda}x^{-\lambda} = 0.$$

Da $\mathfrak{K}_n = 0$ ist, so ergiebt sich hieraus:

$$(11.)\quad \sum_{\nu=\lambda}^{n-1}(-1)^\nu\Pi(\nu-\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu-\lambda}\sum_{p=\nu}^{n}\sum_{\varrho=0}^{\nu-\lambda}(-1)^{p+\varrho-1}\frac{\Pi p}{(p-\varrho)\Pi\varrho\,\Pi(\nu-\lambda-\varrho)}\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

Setzt man:

$$(12.)\qquad \psi(p,\ k) = \sum_{\varrho=0}^{k-1}(-1)^\varrho\frac{\Pi p}{(p-\varrho)\Pi\varrho\,\Pi(k-\varrho-1)},\qquad (k \leqq p)$$

so ergiebt sich auf einfache Weise:

$$\psi(p,\ k) = -(p-k)\psi(p,\ k+1) \qquad (k+1 \leqq p)$$

folglich:

$$(13.) \qquad \psi(p,\ k) = (-1)^{\lambda}\frac{\Pi(p-k)}{\Pi(p-k-\lambda)}\psi(p,\ k+\lambda). \qquad (k+\lambda \leqq p)$$

Nun ist:

$$\psi(p,\ p) = (-1)^{p-1},$$

somit ergiebt sich aus (13.) für $k+\lambda = p$:

$$(14.) \qquad \psi(p,\ k) = (-1)^{k-1}\Pi(p-k). \qquad (k \leqq p)$$

Bei Benutzung dieses Werthes wird (11.):

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n-1}\Pi(\nu-\lambda)\mathfrak{K}_{\nu}a_{\nu-\lambda}\sum_{p=\nu}^{n}(-1)^{p-1}\Pi(p-\nu+\lambda-1)\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n-1}(-1)^{\nu}\Pi(\nu-\lambda)\mathfrak{K}_{\nu}a_{\nu-\lambda}\sum_{p=0}^{n-\nu}(-1)^{p}\Pi(p+\lambda-1)\mathfrak{B}(n-\nu-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0.$$

Wendet man hierauf (I. 45.) an, so folgt:

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n-1}(-1)^{\nu}\Pi(\nu-\lambda)\Pi(\lambda-1)\mathfrak{S}(n-\nu,\ \varepsilon_{n-\nu}-\lambda)\mathfrak{K}_{\nu}a_{\nu-\lambda} = 0,$$

oder:

$$(15.) \quad \sum_{\nu=\lambda}^{n-1}(-1)^{\nu}\Pi(\nu-\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,1}-\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}-\lambda)\dots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}-\lambda)\mathfrak{K}_{\nu}a_{\nu-\lambda} = 0. \quad (\lambda=1,2,\dots,n-1)$$

Die Determinante dieses in Bezug auf die Coefficienten $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-2}$ linearen homogenen Gleichungssystems ist Null, wenn

$$(16.) \qquad \varepsilon_{1,1} = r \qquad (r=1,\ 2,\ \dots,\ n-1)$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist durch (15.) und (I. 48.) die Function $\varphi(x)$ bis auf einen constanten Factor eindeutig bestimmt; die Grössen $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{n-r-2}$ sind alsdann Null. Daher kann man setzen:

$$(17.) \qquad \varphi(x) = x^{n-\varepsilon_{1,1}-1}.\psi(x),$$

wo $\psi(x)$ eine Potenzreihe von x bedeutet, derart dass $\psi(0) \gtrless 0$ ist. Genügt nun $\varepsilon_{1,1}$ der Gleichung (16.), so giebt es eine Function $\zeta(x)$, welche (4.) genügt. Hieraus ergiebt sich weiter, dass dann das $n$te Integral von (N.) die Form:

$$(18.) \qquad y = x^{n-\varepsilon_{1,1}-1}\psi(x)\log x - \eta(x) \qquad (\varepsilon_{1,1}=1,\ 2,\ \dots,\ n-1)$$

besitzt.

Lässt sich (N.) um m Grade reduciren, so wird das allgemeine Integral von (N.) das allgemeine Integral der zu (R.) gehörigen nicht-homogenen Differentialgleichung sein, deren rechte Seite eine ganze Function $(m-1)$-ten Grades von x mit willkürlichen Coefficienten ist. Ist ein Integral dieser Differentialgleichung für $x=0$ eindeutig und stetig, so wird die für $x=0$ unstetige Lösung von (N.) auch Lösung der homogenen Gleichung (R.) sein.

Aus der in § 1 gegebenen Beziehung zwischen den Elementen von (R.) und (N^m.) folgt aus Satz IV., dass nur für ganze negative Zahlen oder ganze positive Zahlen $\leqq m$ von $\varepsilon_{1,1}$ keine Lösung der nicht-homogenen zu (R.) gehörigen Differentialgleichung für $x=0$ eindeutig und stetig zu sein braucht.

Mithin wird für $m+1 \leqq \varepsilon_{11} \leqq n-1$ die $n$te Lösung von (R.) die Form (18.) besitzen; geht man wieder von (R.) zu (N^m.) über, so erkennt man, dass (18.) unverändert für (N^m.) gültig bleibt.

Setzt man den Punkt k_ν an Stelle des Nullpunkts, so ergiebt sich aus (18.):

V. *Für jeden einfach singulären Punkt k_ν von* (N.) *oder* (N^m.) *giebt es eine Lösung der Form:*

$$(19.) \qquad y = (x-k_\nu)^{n-\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}-1}\mathfrak{P}(x-k_\nu)\log(x-k_\nu)+\overline{\mathfrak{P}}(x-k_\nu),$$

wenn $\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}$ eine positive ganze Zahl $\leqq n-1$ mit Ausschluss der Null ist und worin $\mathfrak{P}(0) \gtrless 0$ ist.

Für diese Werthe von $\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}$ enthält das allgemeine Integral *stets* einen Logarithmus.

§ 4.

Setzt man die in (I. 48.) und (15.) vorkommenden Grössen:

$$(20.) \qquad (\varepsilon_{n-\nu,1}\pm\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}\pm\lambda)\dots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}\pm\lambda)\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{f}(\varepsilon_{n-\nu}\pm\lambda)$$

und

$$(21.) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{f}(\varepsilon_\mu+\mu), & \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu-1}+\mu), & \dots, & \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu-\varrho}+\mu) \\ \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu+1}+\mu+1), & \mathfrak{f}(\varepsilon_\mu+\mu+1), & \dots, & \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu-\varrho+1}+\mu+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu+\varrho}+\mu+\varrho), & \mathfrak{f}(\varepsilon_{\mu+\varrho-1}+\mu+\varrho), & \dots, & \mathfrak{f}(\varepsilon_\mu+\mu+\varrho) \end{vmatrix} = D_{\mu,\varrho}(\varepsilon),$$

wo in den Stellen der Determinante, für welche der Index von ε grösser als n oder kleiner als Eins ist, Null zu setzen ist, so ist der Factor von $\log x$ in (18.) eine ganze Function ϱten Grades von x für $\varepsilon_{1,1}=n-1$, wenn:

(22.) $\varepsilon_{n,n} = -\varrho$ und $D_{\mu,\varrho}(\varepsilon-n) = 0$

für alle Werthe von μ von 2 bis $n-1$ ist, wie eine einfache Untersuchung der Formeln (I. 48.) und (15.) lehrt.

Für $\varepsilon_{1,1} = n-1$ folgt aus (18.):

(23.) $$\frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} = \frac{d^\sigma \psi}{dx^\sigma}\log x + \frac{\bar{\eta}(x)}{x^\sigma},$$

wo $\bar{\eta}(x)$ eine Potenzreihe von x bedeutet, deren constantes Glied wegen der entsprechenden Eigenschaft von ψ nicht verschwindet. Ist aber y eine Lösung von (N.), so ist $\frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}$ eine Lösung derjenigen Normalform (nach I. S. 290), welche aus (N.) dadurch entsteht, dass an Stelle der Elemente $\varepsilon_{\lambda,\mu}$ die Elemente $\varepsilon_{\lambda,\mu}+\sigma$ für jeden Werth von λ und μ treten; daher ist $\frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}$ Lösung einer Normalform, für welche $\varepsilon_{1,1} = n+\sigma-1$ ist. Für diese Werthe von $\varepsilon_{1,1}$ giebt (23.) die Form der $n$ten Lösung von (N.).

Ist ψ eine ganze Function höchstens vom Grade $\sigma-1$, so verschwindet in (23.) das mit dem Logarithmus behaftete Glied. Als Bedingung hierfür ergiebt sich aus (22.) für die Normalform, in welcher $\varepsilon_{1,1} = n+\sigma-1$ ist:

$$\varepsilon_{n,n} = \sigma-\varrho = \varepsilon_{1,1}-n-\varrho+1;\ D_{\mu,\varrho}(\varepsilon-n-\sigma) = D_{\mu,\varrho}(\varepsilon-\varepsilon_{1,1}-1) = 0.\ \left(\begin{smallmatrix}\varrho = 0,\,1,\,\ldots,\,\sigma-1\\ \nu = 2,\,3,\,\ldots,\,n-1\end{smallmatrix}\right)$$

Geht man noch wie in § 3 von (N.) zu (R.) und (N^m.) über, so erhält man schliesslich den Satz:

VI. *Für jeden einfach singulären Punkt k_ν von* (N.) *oder* (N^m.) *giebt es eine Lösung der Form:*

(24.) $$y = (x-k_\nu)^{n-\overset{k_\nu}{\varepsilon}_{1,1}-1}\mathfrak{P}(x-k_\nu)+\bar{\mathfrak{P}}(x-k_\nu)\log(x-k_\nu),$$

wenn $\overset{k_\nu}{\varepsilon}_{1,1}$ eine positive ganze Zahl $\geqq n$ ist, und worin $\mathfrak{P}(0)\lesseqgtr 0$ ist. Das mit dem Logarithmus behaftete Glied verschwindet hierin, wenn:

(25.) $$\begin{cases}\varepsilon_{n,n} = \overset{k_\nu}{\varepsilon}_{1,1}-n-\varrho+1 \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_{n+m,n+m} = \overset{k_\nu}{\varepsilon}_{1,1}-n-m-\varrho+1\\ \qquad \text{und} \quad D_{\mu,\varrho}(\overset{k_\nu}{\varepsilon}-\overset{k_\nu}{\varepsilon}_{1,1}-1) = 0\end{cases}$$

für einen Werth von ϱ zwischen 0 *und $\varepsilon_{1,1}-n$ und jeden Werth von μ zwischen* 2 *und $n-1$ resp. $n+m-1$.*

§ 5.

Das allgemeine Integral von (N.) hat für $\varepsilon_{1,1} = 1$ nach (18.) die Form:

(26.) $$y = x^{n-2}\psi(x)\log x+\psi_1(x),$$

wo $\psi_1(x)$ eine Potenzreihe mit $n-1$ willkürlichen Constanten bedeutet.

Durch σ-fache Integration folgt aus (26.):

$$(27.)\qquad z = \int y\,dx^{(\sigma)} = x^{n+\sigma-2}\varphi(x)\log x + \varphi_1(x),$$

wo φ und φ_1 Potenzreihen bedeuten, derart dass $\varphi(0) \lesseqgtr 0$ ist und $\varphi_1(x)$ $n+\sigma-1$ willkürliche Constanten enthält.

Diese Function z ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$(28.)\qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p z}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}-\sigma)\mathfrak{R}_\nu x^{p-\nu} = \sum_{\mu=0}^{\sigma-1} b_\mu x^\mu,$$

wo die σ Constanten b_μ durch eben so viele Constanten von η bestimmt sind. Im allgemeinen wird eine mit dem Logarithmus behaftete unter (27.) enthaltene Function Lösung der zu (28.) gehörigen homogenen Differentialgleichung sein; ist dies nicht der Fall, so sind sämmtliche Lösungen der zu (28.) gehörigen homogenen Differentialgleichung in Potenzreihen von x entwickelbar. Die Bedingungen hierfür ergeben sich durch Untersuchung der Recursionsformeln (I. 48). Zunächst erkennt man, dass die nothwendige Bedingung hierfür ist:

$$\varepsilon_{1,1} = -\tau,\quad \varepsilon_{n,n} = -\varrho,$$

wo τ und ϱ positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null sind, derart dass $\tau \geqq \varrho$. Führt man wieder die durch (21.) definirte Determinante ein, so treten zu den obigen Bedingungen noch die folgenden hinzu:

$$D_{\mu,\tau-\varrho}(\varepsilon-\mu+\varrho) = D_{\mu,\varepsilon_{n,n}-\varepsilon_{1,1}}(\varepsilon-\varepsilon_{n,n}-\mu) = 0$$

für alle Werthe des μ von 2 bis $n-1$.

Geht man von (N.) zu (R.) und (N^m.) über, so erhält man den Satz:

VII. *Für jeden einfach singulären Punkt k_ν von (N.) oder (N^m.) giebt es eine Lösung der Form:*

$$(29.)\qquad y = (x-k_\nu)^{n-\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}-1}\mathfrak{P}(x-k_\nu)\log(x-k_\nu) + \overline{\mathfrak{P}}(x-k_\nu),$$

wenn $\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}$ eine negative ganze Zahl mit Einschluss der Null ist, und worin $\mathfrak{P}(0) \lesseqgtr 0$ ist.

Ist aber alsdann:

$$(30.)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{n,n} \ \textit{resp.}\ \varepsilon_{n+m,n+m} = -\varrho & (\varrho = 0, 1, \ldots, -\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}) \\ \textit{und}\ D_{\mu,\varepsilon_{n,n}-\varepsilon_{1,1}}(\varepsilon^{k_\nu}-\varepsilon_{n,n}-\mu) = 0 & \end{cases}$$

für alle Werthe des μ von 2 bis $n-1$, resp. $n+m-1$, so sind sämmtliche Lösungen von (N.) oder (N^m.) in Potenzreihen von $x-k_\nu$ entwickelbar, von denen eine mit der $(n-\varepsilon_{1,1}^{k_\nu}-1)$-ten Potenz von $x-k_\nu$ beginnt. Der Punkt k_ν ist alsdann ein scheinbar singulärer Punkt.

Bemerkungen zu der Abhandlung von H. Schröter: „Die *Hesse*sche Configuration (12_4, 16_3)."

(Dieses Journal Bd. 108, S. 269—312.)

(Von Herrn *Edmund Hess* in Marburg.)

In der Abhandlung: „Die *Hesse*sche Configuration (12_4, 16_3)*) hat *H. Schröter* eine Fülle von wichtigen Eigenschaften der *Hesse*schen Configuration (12_4, 16_3)A, wie auch der zweiten Configuration (12_4, 16_3)B durch einfache synthetische Betrachtungen hergeleitet. Die im Folgenden mitgetheilten Bemerkungen, zu welchen ich durch das Studium der genannten Abhandlung veranlasst wurde, dürften vielleicht nicht ganz ohne Interesse erscheinen. Dieselben haben einmal die Entstehung der ebenen Figur der Configuration (12_4, 16_3)A aus einer bekannten Raumfigur, dem System dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder zum Gegenstand und lassen den Zusammenhang der Eigenschaften der räumlichen und der ebenen Figur in einfacher Weise erkennen, andererseits berühren sie auch einige Eigenschaften der zweiten Configuration (12_4, 16_3)B und einer durch beide Configurationen A und B bestimmten ebenen Figur. Die gebrauchten Bezeichnungen sind durchweg dieselben, welche *Schröter* angewendet hat.

1. Die ebene *Hesse*sche Configuration (12_4, 16_3)A lässt sich als die Projection der räumlichen Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder erhalten, indem man von einem beliebigen Punkte des Raumes die zwölf Eckpunkte der drei Tetraeder und die sechszehn Verbindungslinien je dreier Ecken auf eine beliebige Ebene, als welche der Einfachheit wegen auch eine der vier Seitenflächen eines Tetraeders gewählt werden kann, projicirt. In der That lässt schon die von *Schröter* (§ 4, S. 277) gegebene Darstellung der Configuration als eines Tripels von drei Vierecken

---

*) Dieses Journal Bd. 108 S. 269—312. Leider sollte dies *H. Schröters* letzte Abhandlung sein.

in desmischer Lage dies unmittelbar erkennen, da die vier möglichen Zuordnungen der Eckpunkte je zweier der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder*) genau denjenigen der Eckpunkte der drei ebenen Vierecke entsprechen.

Das von Herrn *Stephanos***) so genannte *conjugirte* desmische System dreier Tetraeder liefert durch dieselbe Projection die von *Schröter* so genannte conjugirte *Hesse*sche Configuration, deren Configurationsgerade die Projectionen der Verbindungslinien je dreier Eckpunkte des conjugirten desmischen Systems sind, während die achtzehn Tetraederkanten, welche je zwei Eckpunkte des ersten und des zweiten Systems als harmonisch getrennte Punktpaare enthalten, als die achtzehn von *Schröter* unter (h.) (§ 2) aufgeführten Geraden projicirt werden. An anderer Stelle***) habe ich die analytischen Ausdrücke für die Eckpunkte, Ebenen und Geraden der durch diese beiden Tripel von Tetraedern bestimmten Raumfigur, welche die von den Herrn *Th. Reye*†) und *A. Vietor*††) untersuchte sogenannte *harmonische* Configuration (24_9, 18_4) darstellt, angegeben. [In der angeführten Abhandlung*) sind die beiden conjugirten desmischen Systeme durch die Tetraeder T_1, T_2, T_3; T_4, T_5, T_6 mit den bez. Eckpunkten e_1-e_{12}; $e_{13}-e_{24}$ (Tabelle (2α.) in § 2), die sechzehn Verbindungslinien je dreier Eckpunkte des ersten und ebenso des zweiten Systems durch die sechzehn Geraden f' und die sechzehn Geraden f (Tabelle (18.) in § 6) und die achtzehn gemeinschaftlichen Kanten der sechs Tetraeder durch die achtzehn Geraden e oder (i, k) (Tabelle 5α.) in § 4 dargestellt.]

---

*) Vgl. z. B. *E. Hess.* Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder. Math. Ann. Bd. 28, S. 240. Es sei gestattet, folgende Stelle aus einem von *H. Schröter* am 13. October 1891 an mich gerichteten Briefe hier anzuführen: „Ihre Bemerkung, dass die Configuration (12_4, 16_3)A durch eine Projection der *Stephanos*schen Raumfigur dreier desmischen Tetraeder hervorgeht, war mir neu und interessant und bestätigte gewissermassen die von mir instinctiv gewählte Bezeichnung dreier in desmischer Lage befindlichen Vierecke in der Ebene".

**) „Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres". Bullet. des scienc. math. 2me sér. T. III 1879.

***) *E. Hess.* Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen. Nova acta LV No. 2. Halle 1890.

†) *Th. Reye.* Die Hexaeder- und die Oktaeder-Configurationen (12_6, 16_3). Acta Mathematica I, p. 97—108.

††) *A. Vietor.* Die harmonische Configuration. Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i./Br. VIII, 2, 1884.

Die von *Schröter* in § 5 seiner Abhandlung aufgeführten neun Kegelschnitte (t.), welche von je zwei Seitenquadrupeln zweier Vierecke berührt werden, erscheinen alsdann als die Projectionen der neun reellen von Herrn *F. Klein**) so genannten ***Fundamentalflächen*** (und zwar entsprechen den neun von *Schröter* mit 1) bis 9) numerirten Kegelschnitten bezw. die neun in meiner Abhandlung**) durch F_{10}, F_7, F_4; F_9, F_6, F_3; F_8, F_5, F_2 bezeichneten reellen Fundamentalflächen). Diese neun reellen Fundamentalflächen sind identisch mit den von Herrn *Th. Reye****) betrachteten neun reellen Ordnungsflächen von Polarsystemen; die zehnte (von mir durch F_1 bezeichnete) Fundamentalfläche ist imaginär und liefert durch Projection einen imaginären Kegelschnitt, in Beziehung auf welchen sich weitere wichtige Lagenverhältnisse für die ebene Figur ergeben.

Auch die von *Schröter* in § 8 abgeleiteten 24 Kegelschnitte werden als Projectionen der 24 reellen (nicht geradlinigen) Ordnungsflächen von Polarsystemen erhalten, welche die Herren *Th. Reye* und *A. Vietor*†) betrachtet haben; die Gleichungen dieser 24 Flächen zweiter Ordnung in tetraedrischen Coordinaten habe ich in der zuerst angeführten Abhandlung††) aufgestellt.

Aus dem Obigen ist auch sofort ersichtlich, dass die ebene von Herrn *J. de Vries* so genannte ***harmonische*** Configuration $(24_3, 18_4)$, welche durch Vereinigung einer Configuration $(12_4, 16_3)A$ mit ihrer conjugirten resultirt, aus der räumlichen harmonischen Configuration $(24_9, 18_4)$ durch Projection erhalten wird.

Analytisch gestaltet sich die Darstellung und der Nachweis der sämmtlichen Lagenbeziehungen, insbesondere die Herleitung der Eigenschaften der ebenen Configuration $(12_4, 16_3)A$ durch Projection aus der räumlichen äusserst übersichtlich und einfach; doch soll hierauf jetzt nicht näher eingegangen werden.

2. Was sodann die ***zweite*** Configuration $(12_4, 16_3)B$ anlangt, so lässt sich dieselbe ***nicht*** aus einer entsprechenden Raumfigur dreier Tetraeder durch Projection erhalten. Denn es ist bekanntlich, wie ich auch auf

---

*) *F. Klein*, Math. Ann. II, S. 208 unter 9.

**) a. a. O. in § 5 unter (15.).

***) a. a. O. unter 16.

†) a. a. O.

††) Math. Ann. Bd. 28 S. 247—249.

analytischem Wege zeigte*), unmöglich, dass zwei Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ nach folgenden beiden Anordnungen:

$$\frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4} \quad \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_1}$$

zugleich perspectiv liegen, ohne dass die vier Eckpunkte des zweiten Tetraeders sämmtlich mit einander und mit dem Perspectivitätscentrum zusammenfallen. Auch ergiebt sich, dass, wenn man von vornherein die vier Eckpunkte der beiden Tetraeder als in je einer Ebene liegend voraussetzt, es nicht möglich ist, für zwei ebene Vierecke und ein Tetraeder oder für drei ebene Vierecke im Raume eine der Gruppirung (k'.) in der Ebene (Seite 303 der Abhandlung von *Schröter*) analoge Anordnung der Eckpunkte zu bewirken.

Beiläufig sei bemerkt, dass zwei ebene Vierecke im Raume überhaupt nur höchstens auf *zwei* Arten, z. B. den beiden Anordnungen:

$$\frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4} \quad \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}{\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_3}$$

entsprechend perspectiv liegen können. Es können also auch drei ebene Vierecke im Raume nicht der bei der Configuration $(12_4, 16_3)A$ oder bei einem desmischen Systeme dreier Tetraeder stattfindenden Anordnung der Eckpunkte entsprechend vierfach perspectiv liegen.

Dagegen lässt sich auch analytisch sehr einfach für den ganz speciellen Fall, dass alle zwölf Eckpunkte in einer und derselben Ebene liegen, die von *Schröter* durch synthetische Betrachtungen abgeleitete Configuration $(12_4, 16_3)B$ erhalten.

3. Die Bemerkung von *Schröter* (am Schlusse des § 11 seiner Abhandlung), dass die beiden Configurationen $(12_4, 16_3)A$ und B zufolge der Anordnungen (k.) und (k'.) zwölf Configurationsgerade gemein haben, während die vier übrigen verschieden sind, bezieht sich offenbar darauf, dass bei gleicher Bezeichnung der Eckpunkte der beiden Configurationen durch die Buchstaben $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ zwölf Configurationsgerade der beiden Configurationen durch je drei gleich bezeichnete Punkte bestimmt sind. Wenn

*) Math. Ann. Bd. 28 S. 224 unter 4); hier ist die analoge Betrachtung für die *Seitenflächen* der beiden Tetraeder angestellt.

man aber die erste Configuration $(12_4, 16_3)A$ als gegeben annimmt und mit Benutzung der von *Schröter* in § 12 gegebenen Construction die zweite Configuration unter Berücksichtigung der perspectiven Lage der beiden Dreiecke:

$$\frac{\begin{matrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \end{matrix}}{\mathfrak{a}_4}$$

herleitet, so ergiebt sich, dass beide Configurationen die acht Punkte:

$$\begin{matrix} . & . & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & . \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & . \end{matrix}$$

gemein haben, während die vier übrigen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4$ und $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_4\mathfrak{c}'_4$ verschiedene Punkte sind. Stellt man dann das System der 16 Configurationsgeraden für beide Configurationen nach den von *Schröter* gegebenen Anordnungen (k.) und (k.') in folgender Weise dar, wobei die Bezeichnung der Geraden durch römische Ziffern auch genau der von Herrn *J. de Vries* in seiner Abhandlung*) angewendeten entspricht:

$$(\text{k.}) \begin{cases} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \text{V} & \text{VI} & \text{VII} & \text{VIII} \\ \text{IX} & \text{X} & \text{XI} & \text{XII} \\ \text{XIII} & \text{XIV} & \text{XV} & \text{XVI}, \end{cases} \qquad (\text{k}'.) \begin{cases} \text{I}' & \text{II}' & \text{III}' & \text{IV}' \\ \text{V}' & \text{VI}' & \text{VII}' & \text{VIII}' \\ \text{IX}' & \text{X}' & \text{XI}' & \text{XII}' \\ \text{XIII}' & \text{XIV}' & \text{XV}' & \text{XVI}', \end{cases}$$

so findet man, dass folgende *elf* Gerade beider Configurationen coincidiren:

$$\begin{matrix} \text{I}' = \text{V} & . & \text{III}' = \text{III} & . \\ . & \text{VI}' = \text{II} & \text{VII}' = \text{VII} & . \\ \text{IX}' = \text{IX} & \text{X}' = \text{X} & \text{XI}' = \text{XI} & \text{XII}' = \text{XII} \\ \text{XIII}' = \text{XIII} & \text{XIV}' = \text{XIV} & \text{XV}' = \text{XV} & . \quad , \end{matrix}$$

dass also bez. die fünf Configurationsgeraden I, IV, VI, VIII, XVI und II', IV', V', VIII', XVI' von einander verschieden sind. (Man vergleiche hierzu den von Herrn *J. de Vries***) ausgesprochenen Satz, nach welchem jede der beiden Configurationen unzweideutig durch ein vollständiges Vier-

*) „Ueber gewisse ebene Configurationen“. Acta Mathem. 12, 1. S. 64.

**) a. a. O. S. 68 unter 2.

seit und ein Dreieck bestimmt ist, dessen Seiten für die erste bezw. zweite Configuration mit drei allineirten bezw. nicht allineirten Ecken des Vierseits incident sind.).

Wenn man dann ferner aus der gegebenen Configuration $(12_4, 16_3)A$ analog unter Berücksichtigung der perspectiven Lage der beiden Dreieckspaare:

$$\frac{\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}}{b_4} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}}{c_4}$$

zwei weitere Configurationen $(12_4, 16_3)B$ herleitet, so resultirt eine ebene Figur, welche mannigfache bemerkenswerthe Lagenbeziehungen darbietet.

Ueber ein gewisses System linearer homogener Gleichungen.

(Von Herrn *L. Heffter* in Giessen.)

Bei dem System von linearen homogenen Gleichungen

$$(1.)\qquad \sum_{k=1}^{k=i} a_{ik}x_k = 0, \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

worin ausser a_{11} noch

$$a_{\alpha\alpha} = a_{\beta\beta} = a_{\gamma\gamma} = \cdots = a_{\mu\mu} = a_{\nu\nu} = a_{nn} = 0,$$

alle andern a_{ii} aber von Null verschieden und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu$ der Reihe nach irgend welche der Zahlen $2, 3, \ldots, n-1$ sind, sollen ***die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ermittelt werden, dass das System zu befriedigen ist, indem speciell x_1 willkürlich bleibt, also nicht nothwendig gleich Null gesetzt werden muss.***

Die Beantwortung dieser Frage ist besonders deshalb wichtig, weil damit gleichzeitig in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen das Problem, ***ob zu einer beliebigen Wurzel der zu einer Stelle der Bestimmtheit*) gehörigen determinirenden Gleichung wenigstens ein von Logarithmen freies Integral gehört oder nicht**)***, vollständig gelöst wird.

Wir führen zunächst eine Reihe von Bezeichnungen ein.

---

*) Vergl. *Fuchs*, Sitzungsbericht der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 11. März 1886. S. 281.

**) Die hier gewählte Fragestellung, welche von der sonst üblichen „ob eine ganze Integralgruppe von Logarithmen frei sei" (Vergl. z. B. *Fuchs*, dieses Journal Bd. 68 S. 376.) wesentlich verschieden ist, diese aber natürlich mitumfasst, habe ich auch in meiner Habilitationsschrift („Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen", Leipzig 1888.) zum Ausgangspunkt genommen und dort bereits eine stets nothwendige und eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen abgeleitet. Die weitere Ausnützung des jetzt gewonnenen allgemeinen Resultats für die Vereinfachung der ganzen Integralgruppe werde ich an anderer Stelle ausführlich darlegen.

Das Gleichungssystem (1.) werde mit

$$S_{1n} \quad \text{oder kurz} \quad S,$$

seine Determinante mit

$$D_{1n} \quad \text{oder kurz} \quad D$$

bezeichnet; allgemein sei

$$S_{\varrho\sigma} \quad \text{und} \quad D_{\varrho\sigma}$$

das System (bezw. die Determinante), welches aus S_{1n} (bezw. aus D_{1n}) entsteht, wenn 1 durch ϱ, n durch σ ersetzt wird und dabei ϱ irgend eine der Zahlen 1, $\alpha, \beta, \ldots, \nu$; σ irgend eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \nu, n$, die grösser als ϱ, bedeutet. — Für die linken Seiten der einzelnen Gleichungen von S werden noch die kurzen Bezeichnungen eingeführt

$$(2.) \qquad \sum_{k=1}^{k=i} a_{ik} x_k = g_i. \qquad (i=2, 3, \ldots, n)$$

Da in D und allen ihren Unterdeterminanten jede Zeile durch den ersten, jede Colonne durch den zweiten Index charakterisirt ist, sprechen wir einfach von „Zeile i“ und „Colonne k“ der betreffenden Determinante. Dann bezeichnen wir die aus $D_{\varrho\sigma}$ durch Weglassung von Zeile und Colonne ξ (falls diese darin vorkommen) entstehende Determinante mit

$$D_{\varrho(\xi)\sigma},$$

die aus $D_{\varrho\sigma}$ durch Weglassung der beiden Zeilen und Colonnen ξ und η entstehende Determinante mit

$$D_{\varrho(\xi,\eta)\sigma} \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich setzen wir noch die nach Voraussetzung von Null verschiedenen Producte

$$(3.) \qquad \begin{cases} a_{22}.a_{33} \quad \ldots a_{\alpha-1,\alpha-1} = A_{1\alpha}, \\ a_{\alpha+1,\alpha+1}.a_{\alpha+2,\alpha+2} \ldots a_{\beta-1,\beta-1} = A_{\alpha\beta}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{\nu+1,\nu+1}.a_{\nu+2,\nu+2} \ldots a_{n-1,n-1} = A_{\nu n}. \end{cases}$$

Sollte dabei eine oder mehrere der Differenzen $\alpha-1, \beta-\alpha, \ldots, n-\nu$ gleich der Einheit sein, so treten die entsprechenden Grössen A gar nicht auf; wir wollen aber die Bezeichnung auch für diesen Fall beibehalten und

$$A_{\varrho\sigma} = 1$$

setzen, wenn ϱ, σ zwei auf einander folgende der Zahlen 1, $\alpha, \beta, \ldots, \nu, n$ sind und $\sigma-\varrho = 1$ ist. Alsdann haben die folgenden Grössen

$$(4.)\quad \begin{cases} A_{1\alpha} = A_{1\alpha}, \\ A_{1\beta} = A_{1\alpha}.A_{\alpha\beta}, \\ A_{1\gamma} = A_{1\alpha}.A_{\alpha\beta}.A_{\beta\gamma}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1n} = A_{1\alpha}.A_{\alpha\beta}.A_{\beta\gamma}\dots A_{\nu n} \end{cases}$$

in allen Fällen eine wohldefinirte Bedeutung und sind von Null verschieden.

Das vorgelegte Gleichungssystem S ist nun derart, dass die Gleichungen

$$g_2 = 0,\ g_3 = 0,\ \dots,\ g_{\alpha-1} = 0,\ g_{\alpha+1} = 0,\ \dots,\ g_{\beta-1} = 0,\ g_{\beta+1} = 0,\ \dots,\ g_{n-1} = 0$$

nur die von ihnen neu eingeführte Unbekannte, deren Coefficient von Null verschieden ist, durch $x_1, x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\nu$ linear und homogen ausdrücken, über x_1 also nichts aussagen. Wir streben deshalb zunächst danach, das System S durch ein anderes System zu ersetzen, welches nur noch die Unbekannten $x_1, x_\alpha, \dots, x_\nu$ enthält.

Zu dem Ende seien

$$d_2,\ d_3,\ \dots,\ d_{\alpha-1},\ d_{\alpha+1},\ \dots,\ d_{\beta-1},\ d_{\beta+1},\ \dots,\ d_{n-1},\ d_n$$

die Adjuncten der Elemente der ersten Colonne in $D_{1(\alpha\beta\gamma\dots\mu\nu)n}$, so dass also insbesondere

$$d_n = \pm A_{1n}$$

ist. Dann hat man die Identität

$$(5.)\quad \begin{cases} d_2g_2+d_3g_3+\dots+d_{\alpha-1}g_{\alpha-1} \\ +d_{\alpha+1}g_{\alpha+1}+d_{\alpha+2}g_{\alpha+2}+\dots+d_{\beta-1}g_{\beta-1} \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +d_{\nu+1}g_{\nu+1}+d_{\nu+2}g_{\nu+2}+\dots+d_{n-1}g_{n-1}+d_ng_n \\ = x_1D_{1(\alpha\beta\dots\nu)n}+x_\alpha A_{1\alpha}D_{\alpha(\beta\dots\nu)n}+x_\beta A_{1\beta}D_{\beta(\gamma\dots\nu)n}+\dots+x_\nu A_{1\nu}D_{\nu n}, \end{cases}$$

welche lehrt, dass nicht nur die Gleichung

$$(6.)\quad \begin{cases} x_1D_{1(\alpha\beta\dots\nu)n}+x_\alpha A_{1\alpha}D_{\alpha(\beta\dots\nu)n}+\dots+x_\nu A_{1\nu}D_{\nu n} = 0 \\ \qquad\text{oder kurz}\quad g'_\nu = 0 \end{cases}$$

eine Folge des Systems S, sondern, da d_n von Null verschieden, auch umgekehrt die Gleichung $g_n = 0$ eine Folge des Systems ist, welches aus S entsteht, wenn darin $g_n = 0$ durch $g'_\nu = 0$ ersetzt wird.

Ebenso kann man in dem Theilsystem $S_{1\nu}$, und mithin auch in dem ganzen System S_{1n} oder S, die Gleichung $g_\nu = 0$ ersetzen durch die Gleichung

$$(7.)\quad \begin{cases} x_1D_{1(\alpha\dots\mu)\nu}+x_\alpha A_{1\alpha}D_{\alpha(\beta\dots\mu)\nu}+\dots+x_\mu A_{1\mu}D_{\mu\nu} = 0 \\ \qquad\text{oder kurz}\quad g'_\mu = 0, \end{cases}$$

u. s. w.; endlich in dem System $S_{1\alpha}$ die Gleichung $g_\alpha = 0$ durch

$$(8.)\qquad \begin{cases} x_1 D_{1\alpha} = 0 \\ \text{oder } g_1' = 0. \end{cases}$$

Handelt es sich also nur darum, ob das System S die Unbekannte x_1 willkürlich lässt, nicht um die Ausrechnung der Werthe *aller* x, so kann das System S ersetzt werden*) durch das System der Gleichungen $g' = 0$, welches wir kurz mit S' bezeichnen wollen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} 0 = x_1 D_{1\alpha}, \\ 0 = x_1 D_{1(\alpha)\beta} + x_\alpha A_{1\alpha} . D_{\alpha\beta}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 = x_1 D_{1(\alpha\ldots\mu)\nu} + x_\alpha A_{1\alpha} D_{\alpha(\beta\ldots\mu)\nu} + \cdots + x_\mu A_{1\mu} D_{\mu\nu}, \\ 0 = x_1 D_{1(\alpha\ldots\nu)\varkappa} + x_\alpha A_{1\alpha} D_{\alpha(\beta\ldots\nu)\varkappa} + \cdots + x_\mu A_{1\mu} D_{\mu(\nu)\varkappa} + x_\nu A_{1\nu} D_{\nu\varkappa}. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung

$$(10.)\qquad D_{1\alpha} = 0$$

eine stets nothwendige Bedingung, und die Gleichungen

$$(11.)\qquad D_{1\alpha} = 0,\quad D_{1(\alpha)\beta} = 0,\quad \ldots,\quad D_{1(\alpha\ldots\mu)\nu} = 0,\quad D_{1(\alpha\ldots\nu)\varkappa} = 0$$

eine Gruppe stets hinreichender Bedingungen dafür bilden, dass x_1 *willkürlich bleibt.*

Die Gleichung (10.) wollen wir deshalb fortan als erfüllt voraussetzen. Dann hat man aber in S' ein Gleichungssystem von ähnlicher Form wie S und, wenn $D_{\nu\varkappa} = 0$, sogar ein völlig analoges. Ist aber $D_{\nu\varkappa}$ von Null verschieden, so kann man die letzte Gleichung,

$$g_\nu' = 0,$$

einfach fortlassen, weil sie über x_1 nichts aussagt. Dieselbe Betrachtung knüpft sich dann an $g_\mu' = 0$, u. s. w., so dass also S' stets ein dem System S völlig analog gebautes System liefert.

Sind insbesondere alle Determinanten

$$D_{\alpha\beta},\quad D_{\beta\gamma},\quad \ldots,\quad D_{\mu\nu},\quad D_{\nu\varkappa}$$

von Null verschieden, so reducirt sich in dieser Weise S' auf die erste Gleichung

$$x_1 D_{1\alpha} = 0,$$

*) Den hier gegebenen Beweis für die Ersetzbarkeit des Systems S durch S' auf Grund der Identität (5.) verdanke ich einer mir von Herrn *Pasch* freundlichst mitgetheilten Bemerkung.

und *die eine stets nothwendige Bedingung ist in diesem Fall allein zugleich hinreichend.*

Anderenfalls ersetzt man S' — genau wie vorher S durch S' — durch ein neues System S'', welches wieder eine stets nothwendige Bedingung liefert u. s. w., bis man zu einem System $S^{(m)}$ gekommen ist, welches nur eine einzige nothwendige und — für dieses System $S^{(m)}$ — zugleich hinreichende Bedingung ergiebt. *Die Gesammtheit der so erhaltenen Gleichungen $D_{1a} = 0$ und der folgenden stellt also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass x_1 auf Grund des Systems S willkürlich bleibt.*

Das System $S^{(m)}$ wird aber nach einer endlichen Anzahl (m) von Operationen erreicht, weil bei jedem Schritt von einem System $S^{(k)}$ zu $S^{(k+1)}$ die Zahl der Gleichungen des Systems sich mindestens um die Einheit erniedrigt.

Ueber ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen.

(Von Herrn *Adolf Krazer* in Strassburg i. E.)

1.*)

Gegeben sei eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ definirt durch eine p-fach unendliche Reihe vermittelst der Gleichung**):

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sum_{m_1,\dots,m_p}^{-\infty,\dots,+\infty} e^{\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'})+2\sum\limits_\mu(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)};$$

die Parameter $a_{\mu\mu'}=a_{\mu'\mu}$ $(\mu,\mu'=1,2,\dots,p)$ sollen dabei nur der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form sei, unterworfen sein; $u_1,\dots,u_p$ sollen unabhängige complexe Veränderliche, $g_1,\dots,g_p$, $h_1,\dots,h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen. Gegeben seien ferner $4p^2$ rationale***) Grössen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,\dots,p)$, welche die $p(2p-1)$ Bedingungen:

$$(\mathfrak{T}_1.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\varepsilon(\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu}\mathfrak{c}_{\varepsilon\mu'}-\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu'}\mathfrak{c}_{\varepsilon\mu})=0, \quad \sum\limits_\varepsilon(\mathfrak{b}_{\varepsilon\mu}\mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'}-\mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'}\mathfrak{d}_{\varepsilon\mu})=0, \\ \sum\limits_\varepsilon(\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu}\mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'}-\mathfrak{c}_{\varepsilon\mu}\mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'})=\begin{matrix} t, & \text{wenn } \mu'=\mu, \\ 0, & \text{wenn } \mu'\gtrless\mu, \end{matrix} \end{cases} \quad (\mu,\mu'=1,2,\dots,p)$$

*) Vgl. *A. Krazer* und *F. Prym*, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Kurz zusammengefasst und herausgegeben von *A. Krazer*. Leipzig, Teubner.

**) Im Nachstehenden ist allenthalben statt $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}$, $\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}$, $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}$, ... zur Abkürzung nur $\sum\limits_\mu$, $\sum\limits_{\mu'}$, $\sum\limits_\varepsilon$, ... gesetzt.

***) Die Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ wurden bis jetzt stets als ganze Zahlen vorausgesetzt; die grosse Bedeutung, welche die von Herrn *Prym* gelegentlich unserer gemeinsamen Untersuchungen im Frühjahr 1885 eingeführte Erweiterung des Transformationsbegriffs

oder die damit äquivalenten:

$$(\mathfrak{T}_2.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\varepsilon}(\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu'\varepsilon}-\mathfrak{a}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu\varepsilon})=0, \quad \sum\limits_{\varepsilon}(\mathfrak{c}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon}-\mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu\varepsilon})=0, \\ \sum\limits_{\varepsilon}(\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon}-\mathfrak{b}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon})=\begin{matrix} t, & \text{wenn } \mu'=\mu, \\ 0, & \text{wenn } \mu'\gtrless\mu, \end{matrix} \end{cases} \qquad (\mu,\,\mu'=1,2,\dots,p)$$

in denen t eine positive Zahl bezeichnet, erfüllen. Man setze dann:

$$(1.)\qquad A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i+\sum_{\varkappa}\mathfrak{b}_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa},$$

$$(2.)\qquad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i+\sum_{\varkappa}\mathfrak{d}_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad (\mu,\,\nu=1,2,\dots,p)$$

bezeichne die Determinante $\Sigma\pm A_{11}A_{22}\dots A_{pp}$ der p^2 Grössen $A_{\mu\nu}$ mit Δ_A, die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\overline{A}_{\mu\nu}$ und definire p neue Variablen v und $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter b implicite durch die Gleichungen:

$$(3.)\qquad u_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu}A_{\mu\nu}v_\nu,$$

$$(4.)\qquad B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu}A_{\mu\nu}b_{\nu\varrho}, \qquad (\mu,\,\varrho=1,2,\dots,p)$$

oder auch explicite durch die damit äquivalenten:

$$(5.)\qquad v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}\overline{A}_{\mu\nu}u_\mu,$$

$$(6.)\qquad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}\overline{A}_{\mu\nu}B_{\mu\varrho}. \qquad (\nu,\,\varrho=1,2,\dots,p)$$

Unter Beachtung des Umstandes, dass die Grössen b als Parameter einer absolut convergenten Thetareihe betrachtet werden können, lässt sich dann als Transformationsproblem für die Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ die Aufgabe bezeichnen, die Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}((u))_a$ durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}g'\\h'\end{bmatrix}((v))_b$ auszudrücken.

Das so gestellte Problem ist vollständig bestimmt, sobald die $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gegeben sind. Man denke sich dieselben in ein quadratisches Schema von der Form:

---

durch Zulassung gebrochener Zahlen an Stelle der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ für die Behandlung der Transformationstheorie hat, ist aus unserer soeben citirten Abhandlung zu ersehen.

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \dots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \dots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \dots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \hline \mathfrak{c}_{11} & \dots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \dots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \dots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \dots & \mathfrak{d}_{pp} \end{array}\right|$$

gebracht. Dieses System von $4p^2$ Zahlen soll dann die **Charakteristik der Transformation** genannt und, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, abgekürzt mit:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

bezeichnet werden. Es soll auch gestattet sein, die zu der Charakteristik T gehörige Transformation kurz als die Transformation T zu bezeichnen.

Ist das gestellte Transformationsproblem für irgend zwei specielle Charakteristiken:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|, \qquad T' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'_{\mu\nu} & \mathfrak{b}'_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}'_{\mu\nu} & \mathfrak{d}'_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

gelöst, so kann man aus diesen Lösungen immer die Lösung desselben Problems für die Charakteristik:

$$T'' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}''_{\mu\nu} & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

ableiten, deren Elemente sich aus den Elementen von T und T' zusammensetzen mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho}(\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho}(\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), \\ \mathfrak{c}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho}(\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho}(\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}). \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, p)$$

Die Charakteristik T'' soll die aus den Charakteristiken T und T' **zusammengesetzte Charakteristik** genannt werden, und es soll die Beziehung zwischen den drei Charakteristiken T, T', T'' symbolisch durch $TT' = T''$ fixirt werden. Dass man in derselben Weise aus mehreren Charakteristiken $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ..., $T^{(n)}$, nachdem man dieselben in eine bestimmte Reihenfolge gebracht hat, durch Zusammensetzung eine neue Charakteristik $T^{(1)}T^{(2)}\dots T^{(n)}$ erzeugen kann, leuchtet unmittelbar ein, und das vorher ausgesprochene Resultat lässt sich entsprechend dahin verallgemeinern, dass man aus den Lösungen der den Charakteristiken $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ..., $T^{(n)}$ entsprechenden Transformationsprobleme immer die Lösung des der zusammengesetzten Charak-

teristik $T^{(1)}T^{(2)}\dots T^{(n)}$ entsprechenden Transformationsproblems erhalten kann; es soll daher auch die auf diese Weise entstandene, der zusammengesetzten Charakteristik $T^{(1)}T^{(2)}\dots T^{(n)}$ entsprechende Transformation aus den Transformationen $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ..., $T^{(n)}$ zusammengesetzt genannt werden.

Dieses Princip der Zusammensetzung einer Transformation T aus mehreren ist für die Transformationstheorie als ein fundamentales anzusehen. Durch passende Anwendung desselben kann man nämlich die Lösung eines jeden beliebigen Transformationsproblems reduciren auf die Lösung einer geringen Anzahl einfacher Transformationsprobleme, welche mittelst directer Methoden behandelt werden können.

Auf diese Weise ist in der im Eingange citirten Abhandlung das allgemeine Transformationsproblem von den Verfassern gelöst worden, und es ergiebt sich aus dieser Lösung durch passende Verfügung über die darin vorkommenden, nur den Bedingungen $(\mathfrak{T}_1.)$, $(\mathfrak{T}_2.)$ unterworfenen Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ die Lösung eines jeden speciellen Transformationsproblems. In zahlreichen Fällen, und so auch für die im Folgenden vorgelegte specielle Transformation, ist es aber vorzuziehen, die entsprechende Thetaformel, anstatt sie aus der allgemeinen Transformationsformel abzuleiten, direct aus den entsprechenden elementaren Transformationsformeln zusammenzusetzen.

2.

Es sei gegeben die Charakteristik:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{e_{11}}{n} & \dots & \frac{e_{1p}}{n} & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{e_{p1}}{n} & \dots & \frac{e_{pp}}{n} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right|,$$

bei der n eine positive ganze Zahl, die e ganze Zahlen bezeichnen und für $\mu, \nu = 1, 2, \dots, p$ $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ ist; durch dieselbe wird, da für sie die Zahl t den Werth Eins besitzt, eine lineare Transformation bestimmt. Dieselbe lässt sich*) aus elementaren linearen Transformationen zusammensetzen in der Form:

*) Vgl. a. a. O. II. Theil, 5. Abschnitt.

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & n \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline ne_{11} & \dots & ne_{1p} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ne_{p1} & \dots & ne_{pp} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & n & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{array}\right|,$$

und um die zu der Transformation T gehörige Thetaformel zu erhalten, hat man zunächst die drei Thetaformeln, welche den drei auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden elementaren Transformationen entsprechen, aufzustellen.

Es entspricht nun der durch die Charakteristik:

$$T^{(1)} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & n \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation die Thetaformel*):

$$(1.)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sum_{\varrho_1,\dots,\varrho_p}^{0,1,\dots,n-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varrho}{n} \\ nh \end{bmatrix}((v^{(1)}))_{b^{(1)}},$$

bei der:

$$v_\nu^{(1)} = nu_\nu, \quad b_{\nu\nu'}^{(1)} = n^2 a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)$$

ist.

Der durch die Charakteristik:

$$T^{(2)} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline ne_{11} & \dots & ne_{1p} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ne_{p1} & \dots & ne_{pp} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right|$$

*) Vgl. a. a. O. II. Theil, 2. Abschnitt, Formel (1_3).

bestimmten elementaren Transformation entspricht ferner die Formel*):

$$(2.)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(1)} \\ h^{(1)} \end{bmatrix}((v^{(1)}))_{b^{(1)}} = \vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}((v^{(2)}))_{b^{(2)}} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} ne_{\mu\mu'} g_\mu^{(1)} g_{\mu'}^{(1)} \pi i - \sum\limits_{\mu} ne_{\mu\mu} g_\mu^{(1)} \pi i},$$

bei der:

$$g_\nu^{(2)} = g_\nu^{(1)},\quad h_\nu^{(2)} = h_\nu^{(1)} + \tfrac{1}{2} ne_{\nu\nu} - \sum_{\nu'} ne_{\nu\nu'} g_{\nu'}^{(1)},$$
$$v_\nu^{(2)} = v_\nu^{(1)},\quad b_{\nu\nu'}^{(2)} = b_{\nu\nu'}^{(1)} + ne_{\nu\nu'}\pi i \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Der durch die Charakteristik:

$$T^{(3)} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & n & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht endlich die Formel**):

$$(3.)\quad n^p \vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}((v^{(2)}))_{b^{(2)}} = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta\begin{bmatrix} ng^{(2)} \\ \dfrac{h^{(2)}+\sigma}{n} \end{bmatrix}((v))_b e^{-2\sum\limits_{\mu} g_\mu^{(2)} \sigma_\mu \pi i},$$

bei der:

$$v_\nu = \frac{v_\nu^{(2)}}{n},\quad b_{\nu\nu'} = \frac{b_{\nu\nu'}^{(2)}}{n^2} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Bei jeder der aufgestellten drei Formeln ist die auf der linken Seite stehende Thetafunction zunächst als eine beliebige anzusehen; für die beabsichtigte Zusammensetzung aber hat man in der Formel (2.) für jedes ν von 1 bis p $g_\nu^{(1)} = \frac{1}{n}(g_\nu + \varrho_\nu)$, $h_\nu^{(1)} = nh_\nu$ zu setzen und zugleich die in dieser Formel vorkommenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (1.) stehenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ zu betrachten, und hat weiter die in der Formel (3.) vorkommenden Grössen $g^{(2)}$, $h^{(2)}$, $v^{(2)}$, $b^{(2)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (2.) stehen-

*) vergl. a. a. O. II. Theil, 3. Abschnitt, Formel (II.).

**) vergl. a. a. O. II. Theil, 2. Abschnitt, Formel ($\bar{\text{I}}_3$).

den Grössen $g^{(2)}$, $h^{(2)}$, $v^{(2)}$, $b^{(2)}$ anzusehen; es wird dann die auf der linken Seite der Gleichung (2.) stehende Thetafunction mit dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel (1.) stehenden Summe identisch, die auf der linken Seite der Gleichung (3.) vorkommende Thetafunction aber mit der auf der rechten Seite der Gleichung (2.) stehenden.

Nachdem dies geschehen, kann man die drei Formeln zu einer einzigen zusammensetzen, indem man in der Gleichung (1.) nach vorhergegangener Multiplication derselben mit n^p die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (2.) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, nachdem man zuvor in dieser Gleichung an Stelle der auf ihrer rechten Seite stehenden Thetafunction den aus der Gleichung (3.) dafür sich ergebenden Ausdruck eingeführt hat. Man erhält dann die zu der vorgelegten linearen Transformation T gehörige Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$n^p \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$$

$$= \sum_{\varrho_1,\dots,\varrho_p}^{0,1,\dots,n-1} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_p}^{0,1,\dots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}(g_\mu+\varrho_\mu)(g_{\mu'}+\varrho_{\mu'})\pi i - \sum\limits_{\mu} e_{\mu\mu}(g_\mu+\varrho_\mu)\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(g_\mu+\varrho_\mu)\sigma_\mu \pi i} \vartheta\begin{bmatrix} g+\varrho \\ \dfrac{h^{(2)}+\sigma}{n} \end{bmatrix}((u$$

wobei:

$$h_\nu^{(2)} = nh_\nu + \tfrac{1}{2} n e_{\nu\nu} - \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}(g_{\nu'}+\varrho_{\nu'}),$$

$$b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + \frac{e_{\nu\nu'}}{n}\pi i \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)$$

ist.

Der gewonnenen Formel soll jetzt eine einfachere Gestalt gegeben werden. Zu dem Ende führe man auf der rechten Seite der Formel an Stelle der Summationsbuchstaben σ neue Summationsbuchstaben $\dot{\sigma}$ ein, indem man für jedes ν von 1 bis p:

$$\sigma_\nu = \dot{\sigma}_\nu + \tau_\nu$$

setzt, wobei τ_ν eine ganze Zahl bezeichnet, über die sogleich verfügt werden soll. Bei der Ausführung der Summation nach σ_ν wird dann $\dot{\sigma}_\nu$ ein und nur ein Mal einer jeden der Zahlen 0, 1, ..., $n-1$ congruent nach dem Modul n, und da sich das allgemeine Glied der Summe nicht ändert, wenn man die Zahl $\dot{\sigma}_\nu$ durch irgend eine ihr nach dem Modul n congruente, speciell also durch ihren kleinsten positiven Rest nach dem Modul n ersetzt,

so kann die Summation nach den Grössen $\dot{\sigma}$ auch in der Weise ausgeführt werden, dass jede der p Grössen $\dot{\sigma}$ unabhängig von den übrigen die Reihe der Zahlen 0, 1, ..., $n-1$ durchläuft. Setzt man jetzt:

$$\tau_\nu = \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}\varrho_{\nu'}, \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

so wird:

$$h_\nu^{(2)}+\sigma_\nu = h'_\nu+\dot{\sigma}_\nu, \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

wobei:

$$h'_\nu = nh_\nu+\tfrac{1}{2}ne_{\nu\nu}-\sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}g_{\nu'} \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

ist. Schafft man dann die in der Charakteristik der Thetafunction vorkommenden ganzen Zahlen ϱ mit Hülfe der Formel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g+\varrho \\ \dfrac{h'+\dot{\sigma}}{n}\end{bmatrix}((u))_b = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \dfrac{h'+\dot{\sigma}}{n}\end{bmatrix}((u))_b$$

aus der Charakteristik heraus und beachtet, dass wegen $e_{\mu\mu'}=e_{\mu'\mu}$:

$$\sum_\mu\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}(g_\mu+\varrho_\mu)(g_{\mu'}+\varrho_{\mu'}) = \sum_\mu\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}(g_\mu g_{\mu'}+\varrho_\mu\varrho_{\mu'})+2\sum_\mu\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}g_\mu\varrho_{\mu'}$$

ist, so erhält man, wenn man noch bei den Summationsbuchstaben $\dot{\sigma}$ die Punkte unterdrückt, die der Transformation T entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$n^p\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix}((u))_a$$

$$= \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}(g_\mu g_{\mu'}-\varrho_\mu\varrho_{\mu'})\pi i-\sum\limits_\mu e_{\mu\mu}(g_\mu+\varrho_\mu)\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(g_\mu+\varrho_\mu)\sigma_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \dfrac{h'+\sigma}{n}\end{bmatrix}((u))_b$$

und, wenn man schliesslich noch die von den Summationsbuchstaben ϱ, σ freien Theile der Exponentialgrösse vor beide Summenzeichen stellt, die an erster Stelle stehende auf die Grössen ϱ bezügliche Summation über die an zweiter Stelle stehende auf die Grössen σ bezügliche Summation hinüberschiebt und zur Abkürzung:

$$G[\sigma_1\ldots\sigma_p] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu\pi i}$$

setzt, in der Gestalt:

$$n^p\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix}((u))_a$$

$$= e^{\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}g_\mu g_{\mu'}\pi i-\sum\limits_\mu e_{\mu\mu}g_\mu\pi i}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,n-1} G[\sigma_1\ldots\sigma_p]\,e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu g_\mu\sigma_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \dfrac{h'+\sigma}{n}\end{bmatrix}((u))_b,$$

wobei:

$$\begin{aligned} h'_\nu &= nh_\nu + \tfrac{1}{2}ne_{\nu\nu} - \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'} g_{\nu'} \\ b_{\nu\nu'} &= a_{\nu\nu'} + \frac{e_{\nu\nu'}}{n}\pi i \end{aligned} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

3.

Die soeben eingeführte, von den ganzen Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ abhängige Summe:

$$G[\sigma_1 \ldots \sigma_p] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu \varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_\mu (\sigma_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu \pi i},$$

für die im Folgenden auch das kürzere Zeichen $G[\sigma]$ angewandt wird, soll jetzt näher untersucht werden.

Was zunächst das allgemeine Glied dieser Summe betrifft, so ändert dasselbe, als Function der ganzen Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ betrachtet, seinen Werth nicht, wenn man diese Grössen ϱ um beliebige ganze Vielfache von n ändert, also für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, indem man unter $\bar{\varrho}_\mu$ irgend eine ganze Zahl versteht, ϱ_μ in $\varrho_\mu + n\bar{\varrho}_\mu$ übergehen lässt. Um dies einzusehen, hat man nur nachzuweisen, dass der Zuwachs:

$$-\sum_\mu \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}(\varrho_\mu \bar{\varrho}_{\mu'} + \bar{\varrho}_\mu \varrho_{\mu'} + n\bar{\varrho}_\mu \bar{\varrho}_{\mu'})\pi i - 2\sum_\mu (\sigma_\mu + \tfrac{1}{2}ne_{\mu\mu})\bar{\varrho}_\mu \pi i,$$

welchen der Exponent des allgemeinen Gliedes der obigen Summe durch die angegebene Aenderung der Grössen ϱ erlangt, ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ ist. Dieser Zuwachs unterscheidet sich aber in Folge der Beziehungen $e_{\mu\mu'} = e_{\mu'\mu}$ von der Grösse:

$$-n\sum_\mu e_{\mu\mu}\bar{\varrho}_\mu^2 \pi i - n\sum_\mu e_{\mu\mu}\bar{\varrho}_\mu \pi i = -n\sum_\mu e_{\mu\mu}\bar{\varrho}_\mu(\bar{\varrho}_\mu + 1)\pi i$$

nur um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ und stellt daher selbst ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ dar, da $\bar{\varrho}_\mu\,(\bar{\varrho}_\mu + 1)$ stets gerade ist. Damit ist aber die obige Behauptung bewiesen.

In Folge des soeben Bewiesenen, wonach das allgemeine Glied der Summe $G[\sigma]$ seinen Werth nicht ändert, wenn man darin die Grössen $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ um ganze Vielfache von n ändert, erleidet diese Summe selbst nur eine Umstellung ihrer Glieder und folglich keine Aenderung ihres Werthes, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grössen ϱ um irgend welche ganze Zahlen ändert. Es besteht daher für je p ganze Zahlen $\bar{\varrho}_1, \ldots, \bar{\varrho}_p$ die Gleichung:

$$G[\sigma_1\ldots\sigma_p] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}(\varrho_\mu+\bar\varrho_\mu)(\varrho_{\mu'}+\bar\varrho_{\mu'})\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})(\varrho_\mu+\bar\varrho_\mu)\pi i}$$

$$= e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\bar\varrho_\mu\bar\varrho_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\bar\varrho_\mu\pi i}$$

$$\times \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\bar\varrho_{\mu'}\pi i}.$$

Unterwirft man nun die p auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommenden noch unbestimmten ganzen Zahlen $\bar\varrho$ den p Bedingungen:

$$\text{(C.)}\qquad \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\bar\varrho_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod.}\,n), \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

so reducirt sich die auf der rechten Seite dieser Gleichung in der letzten Zeile stehende Summe auf die ursprüngliche Summe $G[\sigma]$, und man hat daher für je p ganze Zahlen $\bar\varrho$, welche den Congruenzen (C.) genügen, die Gleichung:

$$G[\sigma_1\ldots\sigma_p] = e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\bar\varrho_\mu\bar\varrho_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\bar\varrho_\mu\pi i}\, G[\sigma_1\ldots\sigma_p].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass $G[\sigma]$ immer verschwindet, wenn die auf der rechten Seite der Gleichung stehende Exponentialgrösse auch nur für eine Lösung $\bar\varrho_1, \ldots, \bar\varrho_p$ des Congruenzensystems (C.) einen von Eins verschiedenen Werth hat. Bezeichnet man daher die, immer von Null verschiedene, Anzahl der Normallösungen*) dieses Congruenzensystems mit s und die s Lösungen selbst mit $\bar\varrho_1^{(i)}, \ldots, \bar\varrho_p^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,s)$, so muss ein Zahlensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, für welches $G[\sigma]$ nicht verschwindet, nothwendig eine Lösung des Gleichungensystems:

$$\text{(E.)}\qquad e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\bar\varrho_\mu^{(i)}\bar\varrho_{\mu'}^{(i)}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\bar\varrho_\mu^{(i)}\pi i} = 1 \qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

sein.

Es soll zunächst bewiesen werden, dass jedenfalls ein Zahlensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ existirt, für welches $G[\sigma]$ nicht verschwindet. Zu dem Ende

*) Normallösungen werden bei einem auf die positive ganze Zahl M als Modul sich beziehenden Systeme linearer Congruenzen diejenigen genannt, welche ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, M-1$ gebildet sind.

lasse man in der die Grösse $G[\sigma]$ definirenden Gleichung an Stelle des Systems der p Grössen $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ der Reihe nach die n^p Variationen der Elemente 0, 1, ..., $n-1$ zur $p$ten Klasse mit Wiederholung treten und addire die n^p so entstandenen Gleichungen. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_p}^{0,1,\dots,n-1} G[\sigma_1\dots\sigma_p]$$

$$= \sum_{\varrho_1,\dots,\varrho_p}^{0,1,\dots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i - \sum\limits_{\mu} e_{\mu\mu}\varrho_\mu\pi i} \left\{ \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_p}^{0,1,\dots,n-1} e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}\sigma_\mu\varrho_\mu\pi i} \right\}.$$

Die im allgemeinen Gliede der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe hat nur dann einen von Null verschiedenen Werth, und zwar den Werth n^p, wenn die in ihr vorkommenden Zahlen $\varrho_1, \dots, \varrho_p$ sämmtlich den Werth Null besitzen; in Folge dessen fallen in der die rechte Seite der letzten Gleichung bildenden Summe alle Glieder weg bis auf das eine, für welches die sämmtlichen p Grössen ϱ den Werth Null haben, und man erhält:

$$\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_p}^{0,1,\dots,n-1} G[\sigma_1\dots\sigma_p] = n^p.$$

Diese Gleichung könnte aber nicht bestehen, wenn alle Grössen $G[\sigma]$ den Werth Null besässen, und es existirt daher wenigstens ein Zahlensystem $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, für welches $G[\sigma]$ nicht verschwindet.

Mit Rücksicht auf das soeben Bewiesene soll im Folgenden unter $\overset{0}{\sigma}_1, \dots, \overset{0}{\sigma}_p$ ein Zahlensystem verstanden werden, für welches $G[\sigma]$ nicht verschwindet. Dieses Zahlensystem ist dann nach Früherem eine Lösung des Gleichungensystems (E.), und es kann nun mit Hülfe dieser einen stets existirenden Lösung des Gleichungensystems (E.) die allgemeinste Lösung desselben hergestellt werden. Zu dem Ende nehme man an, dass ausser dem Zahlensysteme $\overset{0}{\sigma}_1, \dots, \overset{0}{\sigma}_p$ noch ein zweites Zahlensystem $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_p$ existire, welches die sämmtlichen Gleichungen (E.) erfüllt. Ersetzt man dann in (E.) die Grössen σ einmal durch die Grössen $\overset{0}{\sigma}$, ein anderes Mal durch die Grössen $\bar{\sigma}$ und verbindet je zwei entsprechende Gleichungen der beiden so entstandenen Gleichungensysteme in passender Weise, so erhält man die s Gleichungen:

die Gleichungen (E.) erfüllt, sich mit Hülfe passend gewählter ganzer Zahlen x, λ durch die zu Anfang fixirte Lösung $\overset{\bullet}{\sigma}$ dieses Gleichungensystemes in der Form:

$$\sigma_{\mu'} = \overset{\bullet}{\sigma}_{\mu'} + \sum_{\mu} e_{\mu\mu'} x_{\mu} + n\lambda_{\mu'} \qquad (\mu'=1,2,\ldots,p)$$

ausdrücken lässt. Umgekehrt erfüllt aber auch jedes Zahlensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, welches in dieser Form darstellbar ist, die sämmtlichen Gleichungen (E.), und es stellt daher:

$$\sigma_{\mu'} = \overset{\bullet}{\sigma}_{\mu'} + \sum_{\mu} e_{\mu\mu'} x_{\mu} + n\lambda_{\mu'}, \qquad (\mu'=1,2,\ldots,p)$$

wobei die x, λ beliebige ganze Zahlen bezeichnen, die allgemeinste Lösung des Gleichungensystems (E.) dar.

Es soll jetzt schliesslich noch bewiesen werden, dass die Summe $G[\sigma]$ für jedes Zahlensystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, welches in der Form:

$$\sigma_{\mu'} = \overset{\circ}{\sigma}_{\mu'} + \sum_{\mu} e_{\mu\mu'} x_{\mu} + n\lambda_{\mu'}, \qquad (\mu'=1,2,\ldots,p)$$

bei der die x, λ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen, darstellbar ist, oder, was dasselbe, für jede Lösung des Gleichungensystems (E.) einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Zu dem Ende führe man die soeben definirten Zahlen σ in die zu Anfang dieses Artikels aufgestellte, die Grösse $G[\sigma]$ definirende Gleichung ein. Man erhält dann zunächst unter Beachtung der Beziehungen $e_{\mu\mu'} = e_{\mu'\mu}$:

$$G[\overset{\bullet}{\sigma}_1 + \sum_{\mu} e_{\mu 1} x_{\mu} + n\lambda_1 \ldots \overset{\bullet}{\sigma}_p + \sum_{\mu} e_{\mu p} x_{\mu} + n\lambda_p]$$

$$= \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum_{\mu}\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_{\mu}\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum_{\mu}(\overset{\bullet}{\sigma}_{\mu} + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_{\mu'} + n\lambda_{\mu} + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_{\mu}\pi i}$$

$$= \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum_{\mu}\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_{\mu}\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum_{\mu}(\overset{\bullet}{\sigma}_{\mu} + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_{\mu}\pi i - \frac{2}{n}\sum_{\mu}\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_{\mu'}\varrho_{\mu}\pi i}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\sum_{\mu}\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_{\mu}x_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_{\mu} + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})x_{\mu}\pi i}$$

$$\times \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum_{\mu}\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}(\varrho_{\mu}+x_{\mu})(\varrho_{\mu'}+x_{\mu'})\pi i - \frac{2}{n}\sum_{\mu}(\overset{\bullet}{\sigma}_{\mu} + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})(\varrho_{\mu}+x_{\mu})\pi i}.$$

Nun ändert aber nach früher Bewiesenem die mit $G[\sigma]$ bezeichnete Summe ihren Werth nicht, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grössen ϱ

um irgend welche ganze Zahlen ändert; in Folge dessen hat die in der letzten Zeile der vorhergehenden Formel stehende Summe den Werth $G[\overset{\circ}{\sigma}_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p]$, und man gelangt so schliesslich zu der Gleichung:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}_1 + \sum_\mu e_{\mu 1} x_\mu + n\lambda_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p + \sum_\mu e_{\mu p} x_\mu + n\lambda_p]$$
$$= e^{\frac{1}{n}\sum_\mu \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'} \pi i + \frac{2}{n}\sum_\mu (\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2} n e_{\mu\mu}) x_\mu \pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p].$$

Da die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Grösse $G[\overset{\circ}{\sigma}]$ der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist, so besitzt auch die auf der linken Seite stehende Grösse stets einen von Null verschiedenen Werth, einerlei welche ganzen Zahlen mit $\varkappa$, λ bezeichnet sein mögen. Damit ist aber die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung lässt sich nun dahin zusammenfassen, dass diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, für welche $G[\sigma_1 \ldots \sigma_p]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, identisch sind mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, welche den Gleichungen (E.) genügen, und dass diese Zahlensysteme $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ sämmtlich durch das Gleichungensystem:

$$\sigma_\mu = \overset{\circ}{\sigma}_\mu + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'} \varkappa_{\mu'} + n\lambda_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\overset{\circ}{\sigma}_1, \ldots, \overset{\circ}{\sigma}_p$ irgend eine Lösung des Gleichungensystems (E.) versteht, für die $\varkappa$, λ aber der Reihe nach alle möglichen Systeme von je $2p$ ganzen Zahlen setzt.

4.

Man gehe jetzt auf die am Schlusse des Art. 2 aufgestellte Thetaformel zurück. Von den n^p Coefficienten $G[\sigma]$, welche auf der rechten Seite dieser Formel bei Ausführung der Summation über die Grössen σ auftreten, sind, wie im vorigen Artikel bewiesen wurde, nur diejenigen von Null verschieden, bei denen die zugehörigen ganzen Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ sich in die Form:

$$\sigma_\mu = \overset{\circ}{\sigma}_\mu + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'} \varkappa_{\mu'} + n\lambda_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bringen lassen, wobei $\overset{\circ}{\sigma}_1, \ldots, \overset{\circ}{\sigma}_p$ irgend eine Lösung des Gleichungensystems (E.) bezeichnet, die $\varkappa$, λ aber ganze Zahlen bedeuten. Man kann daher

im allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der betreffenden Thetaformel stehenden Summe die Grössen σ durch die soeben dafür aufgestellten Ausdrücke ersetzen, da alle Glieder, bei denen die zugehörigen Zahlen σ nicht in diese Form gebracht werden können, in Folge des Verschwindens der zugehörigen Coefficienten $G[\sigma]$ wegfallen, und es geht dann, wenn man zur Abkürzung:

$$\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_{\mu'} + n\lambda_\mu = \bar{\eta}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt, die genannte Summe über in die neue Summe:

$$S = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}} G[\overset{\circ}{\sigma}_1 + \bar{\eta}_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p + \bar{\eta}_p] e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum_\mu g_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \bar{\eta}_\mu)} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h' + \overset{\circ}{\sigma} + \bar{\eta}}{n} \end{bmatrix}((u))_b,$$

zu deren Bildung die rechts angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ nur solche Systeme von je $2p$ ganzen Zahlen treten, für welche die p Grössen $\overset{\circ}{\sigma}_1 + \bar{\eta}_1, \ldots, \overset{\circ}{\sigma}_p + \bar{\eta}_p$ sämmtlich in Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$ übergehen, und zudem von diesen Zahlensystemen nur so viele als erforderlich sind, damit jedes im Rahmen der angegebenen Bedingungen mögliche System in der That einmal aber auch nur einmal auftritt.

Diese Summe S soll jetzt mit der Summe:

$$S' = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} G[\overset{\circ}{\sigma}_1 + \eta_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p + \eta_p] e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum_\mu g_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \eta_\mu)} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h' + \overset{\circ}{\sigma} + \eta}{n} \end{bmatrix}((u))_b$$

verglichen werden, in der:

$$\eta_\mu = \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_{\mu'} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, und zu deren Bildung die rechts angedeutete Summation so auszuführen ist, dass an Stelle des Systems der p Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ der Reihe nach die sämmtlichen n^p Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, n-1$ zur $p$ten Klasse mit Wiederholung treten. Zu dem Ende bezeichne man wie früher mit s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystemes (C.) und ordne die auf der rechten Seite der letzten Gleichung bei Ausführung der Summation auftretenden n^p Summanden in $\frac{n^p}{s}$ Gruppen, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Summanden, immer s an der Zahl, zusammenfasst, für

welche sich die Werthe der p Grössen $\eta_1, \dots, \eta_p$ und daher auch der p Grössen $\overset{\circ}{\sigma}_1+\eta_1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}_p+\eta_p$ nur um ganze Vielfache von n ändern, wenn man von einem dieser Summanden zu einem anderen übergeht. Die s in einer Gruppe vorkommenden Summanden besitzen dann denselben Werth, da sowohl die im allgemeinen Gliede der Summe S' vorkommende Thetafunction zusammengenommen mit der davor stehenden Exponentialgrösse ungeändert bleibt, wenn man die in ihnen vorkommenden Grössen η um ganze Vielfache von n ändert, als auch jede Grösse $G[\sigma]$, wie aus der sie definirenden Gleichung folgt, keine Aenderung ihres Werthes erfährt, wenn man die zu ihr gehörigen Zahlen σ um beliebige ganze Vielfache von n ändert, und man kann daher jede solche Gruppe von Summanden durch das s-fache eines beliebigen unter ihnen ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{n^p}{s}$ Gruppen aus, so geht die Summe S' in das s-fache einer neuen Summe S'' von nur $\frac{n^p}{s}$ Summanden über, die dadurch ausgezeichnet sind, dass die in irgend zwei unter ihnen auftretenden Thetafunctionen stets incongruente Charakteristiken besitzen. Von dieser Summe S'' soll jetzt nachgewiesen werden, dass sie denselben Werth besitzt wie die Summe S. Da aber sowohl bei der Summe S wie bei der Summe S'' die in irgend zwei der Summanden vorkommenden Thetafunctionen immer incongruente Charakteristiken besitzen, so wird der verlangte Nachweis erbracht sein, sobald gezeigt ist, dass sowohl jedem Summanden von S stets ein ihm gleicher Summand von S'', als auch jedem Summanden von S'' stets ein ihm gleicher Summand von S entspricht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass ein jedes System:

$$\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\bar{\eta}_\mu = \overset{\circ}{\sigma}_\mu+\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_{\mu'}+n\lambda_\mu, \qquad (\mu=1,2,\dots,p)$$

bei dem die $2p$ Grössen $\varkappa$, λ solche ganzzahlige Werthe besitzen, dass $\overset{\circ}{\sigma}_1+\bar{\eta}_1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}_p+\bar{\eta}_p$ sämmtlich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots, n-1$ sind, abgesehen von ganzen Vielfachen von n stets in ein System:

$$\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\eta_\mu = \overset{\circ}{\sigma}_\mu+\sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_{\mu'}, \qquad (\mu=1,2,\dots,p)$$

bei dem die p Grössen $\varkappa'$ sämmtlich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots, n-1$ sind, übergeführt werden kann, und dass auch umgekehrt jedes System der zweiten Art durch Abschreibung von ganzen Vielfachen von n in ein System

der ersten Art übergeführt werden kann. Ein System der ersten Art geht aber, indem man die darin vorkommenden p Zahlen $\varkappa$ durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul n, die p Zahlen λ aber durch die Null ersetzt, sofort in ein System der zweiten Art über, das sich von dem gegebenen Systeme erster Art nur um ganze Vielfache von n unterscheidet. Handelt es sich dagegen darum, ein gegebenes System der zweiten Art durch Abschreibung ganzer Vielfacher von n in ein System der ersten Art überzuführen, so setze man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\overset{\bullet}{\sigma}_\mu + \eta_\mu = \overset{0}{\sigma}_\mu + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_{\mu'} = \bar{\sigma}_\mu + n\tau_\mu,$$

indem man unter $\bar{\sigma}_\mu$ den kleinsten positiven Rest der die linke Seite dieser Gleichung bildenden Grösse nach dem Modul n versteht, und beachte, dass dann:

$$\overset{0}{\sigma}_\mu + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_{\mu'} - n\tau_\mu = \bar{\sigma}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

ein System der ersten Art ist, bei dem die Zahlen $\varkappa$, λ die Werthe:

$$\varkappa_\mu = \varkappa'_\mu, \quad \lambda_\mu = -\tau_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

haben, und das sich von dem gegebenen Systeme der zweiten Art nur um ganze Vielfache von n unterscheidet. Damit ist bewiesen, dass die Summe S'' denselben Werth besitzt, wie die Summe S, und es folgt dann sofort weiter, dass der Werth der Summe S' das s-fache des Werthes der Summe S, und daher auch das s-fache der auf der rechten Seite der in Rede stehenden Thetaformel vorkommenden Summe ist.

Auf Grund des soeben Bewiesenen kann man in der am Ende des Art. 2 aufgestellten Thetaformel das s-fache der auf der rechten Seite derselben stehenden Summe durch die Summe S' ersetzen, und man erhält dann, wenn man die in S' vorkommende Grösse $G[\overset{\bullet}{\sigma}+\eta]$ mit Hülfe der Gleichung:

$$G[\overset{\bullet}{\sigma}+\eta] = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\bullet}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varkappa_\mu\pi i}\, G[\overset{\bullet}{\sigma}]$$

durch die Grösse $G[\overset{\bullet}{\sigma}]$ ausdrückt und endlich noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit s multiplicirt, die der Transformation T entsprechende Thetaformel in der reducirten Gestalt:

$$sn^p\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix}((u))_a = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}g_\mu g_{\mu'}\pi i - \sum\limits_{\mu} e_{\mu\mu}g_\mu \pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{x_1,\dots,x_p}^{0,1,\dots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})x_\mu\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu} g_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\eta_\mu)\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h'+\overset{\circ}{\sigma}+\eta}{n}\end{bmatrix}((u))_b,$$

wobei zur Abkürzung:

$$\eta_\mu = \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_{\mu'} \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

gesetzt ist.

Man hat auf diese Weise die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & \frac{e_{\mu\nu}}{n} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems in der endgültigen Gestalt:

$$(\Theta.)\quad \begin{cases} sn^p\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix}((u))_a = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}g_\mu g_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})g_\mu\pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}] \\ \times \sum\limits_{x_1,\dots,x_p}^{0,1,\dots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})x_\mu\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu} g_\mu\eta_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h'+\overset{\circ}{\sigma}+\eta}{n}\end{bmatrix}((u))_b \end{cases}$$

erhalten; dabei ist:

$$b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + \frac{e_{\nu\nu'}}{n}\pi i; \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$h'_\nu = nh_\nu + \tfrac{1}{2}ne_{\nu\nu} - \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}g_{\nu'}, \quad \eta_\nu = \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}x_{\nu'}; \qquad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

es bezeichnet weiter s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C.)\qquad \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_{\mu'} \equiv 0 \pmod{n}; \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

unter $\overset{\circ}{\sigma}_1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}_p$ ist irgend eine Lösung des Gleichungensystems:

$$(E.)\qquad e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu^{(i)}\varrho_{\mu'}^{(i)}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu^{(i)}\pi i} = 1, \qquad (i = 1, 2, \dots, s)$$

zu verstehen, in dem $\varrho_1^{(i)}, \ldots, \varrho_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems (C.) bezeichnen; endlich ist:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu\pi i}.$$

Die Anzahl s, sowie die Zahlen $\overset{\circ}{\sigma}$ hängen von den Zahlenwerthen der e ab und müssen in jedem Falle besonders bestimmt werden.

Die auf der rechten Seite der Gleichung $(\Theta.)$ bei Ausführung der Summation auftretenden n^p Summanden können in $\frac{n^p}{s}$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Summanden, immer s an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der p Grössen $\eta_1, \ldots, \eta_p$ nur um ganze Vielfache von n ändern, wenn man von einem dieser s Summanden zu einem anderen derselben übergeht. Man zeigt dann leicht, dass die s in einer Gruppe vorkommenden Summanden denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das s-fache eines beliebigen Summanden ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{n^p}{s}$ Gruppen aus, so geht die in Rede stehende Summe in das s-fache einer Summe von $\frac{n^p}{s}$ wesentlich verschiedenen, d. h. nicht auf einander reducirbaren Summanden über.

5.

Aus der gewonnenen Formel $(\Theta.)$ kann man eine neue ableiten, welche eine Function $\vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((u))_b$ durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}k'\\l'\end{bmatrix}((u))_a$ ausdrückt, und welche daher als die Umkehrung der Formel $(\Theta.)$ anzusehen ist.

Um dieselbe zu erhalten, setze man in der Formel $(\Theta.)$, indem man unter $k_1, \ldots, k_p$, $l_1, \ldots, l_p$ beliebige reelle Constanten, unter $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ganze Zahlen versteht und mit $l'_1, \ldots, l'_p$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ die aus diesen gebildeten Ausdrücke:

$$l'_\nu = nl_\nu - \tfrac{1}{2}ne_{\nu\nu} + \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}k_{\nu'}, \quad \zeta_\nu = \sum_{\nu'} e_{\nu\nu'}\lambda_{\nu'} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet, für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$g_\nu = k_\nu, \quad h_\nu = \frac{1}{n}(l'_\nu - \overset{\circ}{\sigma}_\nu - \zeta_\nu); \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

es wird dann:

$$h'_\nu = nl_\nu - \overset{\circ}{\sigma}_\nu - \zeta_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und aus der Gleichung (Θ.) geht die Gleichung:

$$sn^p\vartheta\begin{bmatrix} k \\ \frac{l'-\overset{\circ}{\sigma}-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_a = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}k_\mu k_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})k_\mu \pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{x_1,\ldots,x_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})x_\mu \pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}k_\mu\eta_\mu\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l + \frac{\eta-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_b$$

hervor. In dieser Gleichung multiplicire man linke und rechte Seite mit:

$$e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\lambda_\mu\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}k_\mu\zeta_\mu\pi i},$$

lasse an Stelle des Systems der p Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ der Reihe nach die n^p Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, n-1$ zur $p$ten Klasse mit Wiederholung treten und addire die n^p so entstehenden Gleichungen zu einander; man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$sn^p\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\lambda_\mu\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}k_\mu\zeta_\mu\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} k \\ \frac{l'-\overset{\circ}{\sigma}-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_a$$

$$= e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}k_\mu k_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})k_\mu\pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}]\sum_{x_1,\ldots,x_p}^{0,1,\ldots,n-1}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}(x_\mu x_{\mu'} - \lambda_\mu\lambda_{\mu'})\pi i}$$

$$\times e^{\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})(x_\mu - \lambda_\mu)\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}k_\mu(\eta_\mu - \zeta_\mu)\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l + \frac{\eta-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_b.$$

In der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Summe führe man nun an Stelle der Summationsbuchstaben λ neue Summationsbuchstaben x' ein, indem man für jedes μ von 1 bis p:

$$\lambda_\mu = x'_\mu + \tau_\mu$$

setzt, wobei τ_μ eine ganze Zahl bezeichnet, über die sogleich verfügt werden soll. Bei der Ausführung der Summation nach λ_μ wird dann x'_μ ein und nur ein Mal einer jeden der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ congruent nach dem Modul n, und da sich das allgemeine Glied der Summe nicht ändert, wenn man die Zahl x'_μ durch irgend eine ihr nach dem Modul n congruente,



speciell also durch ihren kleinsten positiven Rest nach dem Modul n ersetzt, so kann die Summation nach den Grössen $\varkappa'$ auch in der Weise ausgeführt werden, dass jede der p Grössen $\varkappa'_\mu$ unabhängig von den übrigen die Reihe der Zahlen 0, 1, ..., $n-1$ durchläuft. Setzt man jetzt:

$$\tau_\mu = \varkappa_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

und bezeichnet mit η'_μ den Ausdruck:

$$\eta'_\mu = \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_{\mu'}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

so nimmt die obige Thetaformel, wenn man noch die auf die Grössen $\varkappa$ bezügliche Summation über die auf die Grössen $\varkappa'$ bezügliche Summation und auch noch über die von den Summationsbuchstaben $\varkappa'$ freien Theile des allgemeinen Gliedes hinüberschiebt, die Gestalt:

$$sn^p \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\lambda_\mu\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_\mu k_\mu\zeta_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ \frac{l'-\overset{\circ}{\sigma}-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_a$$

$$= e^{\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}k_\mu k_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})k_\mu\pi i}\, G[\overset{\circ}{\sigma}] \sum_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_\mu\varkappa'_{\mu'}\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varkappa'_\mu\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_\mu k_\mu\eta'_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l-\frac{\eta'}{n}\end{bmatrix}((u))_b \left(\sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_{\mu'}\varkappa_\mu\pi i}\right).$$

Beachtet man aber, dass die am Schlusse dieser Formel stehende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n^p besitzt, wenn die bei ihr vorkommenden Zahlen $\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_p$ den Congruenzen (C.) genügen, dass dieses bei Ausführung der Summation nach den Grössen $\varkappa'$ im Ganzen s-mal eintritt, und dass für alle diese Zahlensysteme $\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_p$:

$$e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa'_\mu\varkappa'_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_\mu(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varkappa'_\mu\pi i} = 1,$$

$$e^{+\frac{2}{n}\sum\limits_\mu k_\mu\eta'_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l-\frac{\eta'}{n}\end{bmatrix}((u))_b = \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l\end{bmatrix}((u))_b$$

ist, so erhält man schliesslich die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$(\overline{\Theta}.)\quad \begin{cases} sn^p\vartheta\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}((u))_b = e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}k_\mu k_{\mu'}\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})k_\mu\pi i}\,\dfrac{sn^p}{G[\overset{\circ}{\sigma}]} \\ \times\sum\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}\pi i-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\lambda_\mu\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}k_\mu\zeta_\mu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}k\\ \dfrac{l'-\overset{\circ}{\sigma}-\zeta}{n}\end{bmatrix}((u))_a. \end{cases}$$

Die gewonnenen Formeln $(\Theta.)$, $(\overline{\Theta}.)$ stehen in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen als die Umkehrung der anderen betrachtet werden kann; sie können aber auch als nicht wesentlich verschiedene Formeln angesehen werden, wenn man beachtet, dass die Formel $(\Theta.)$ die Lösung des durch die Charakteristik T bestimmten Transformationsproblems, die Formel $(\overline{\Theta}.)$ also die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \ldots & 0 \\ & -\dfrac{e_{\mu\nu}}{n} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten, dazu inversen Transformationsproblems darstellt, und dass die Transformation T^{-1} aus der Transformation T auch dadurch erhalten werden kann, dass man allgemein $e_{\mu\nu}$ durch $-e_{\mu\nu}$ ersetzt. Führt man dies in der Gleichung $(\Theta.)$ aus und richtet die Bezeichnung in passender Weise ein, so erhält man als Lösung des durch die Charakteristik T^{-1} bestimmten Transformationsproblems eine Formel, welche sich von der Formel $(\overline{\Theta}.)$ nur dadurch unterscheidet, dass an der Stelle des Ausdrucks $\dfrac{sn^p}{G[\overset{\circ}{\sigma}]}$ der Ausdruck:

$$\overline{G}[\overset{\circ}{\sigma}] = \sum_{\varrho_1,\ldots\varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu+\frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu\pi i}$$

steht. Zwischen den beiden Summen $G[\overset{\circ}{\sigma}]$, $\overline{G}[\overset{\circ}{\sigma}]$ besteht sohin die Beziehung:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}]\overline{G}[\overset{\circ}{\sigma}] = sn^p.$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch direct überzeugen. Versteht man nämlich unter $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ irgend welche ganze Zahlen

und setzt für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\eta_\mu = \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'} \varkappa_{\mu'},$$

so ist, wie in Art. 3 bewiesen wurde:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}_1+\eta_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p+\eta_p] = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varkappa_\mu \pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p];$$

andererseits ist aber auch:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}_1+\eta_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p+\eta_p] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu \pi i} \times e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_{\mu'}\varrho_\mu \pi i},$$

und man erhält daher für die Summe:

$$S = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} G[\overset{\circ}{\sigma}_1+\eta_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p+\eta_p]$$

den zweifachen Ausdruck:

$$S = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varkappa_\mu \pi i} G[\overset{\circ}{\sigma}_1 \ldots \overset{\circ}{\sigma}_p].$$

$$S = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \frac{1}{2}ne_{\mu\mu})\varrho_\mu \pi i} \left(\sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varkappa_{\mu'}\varrho_\mu \pi i} \right).$$

Nun folgt aber aus der ersten der beiden Gleichungen sofort:

$$S = G[\overset{\circ}{\sigma}]\bar{G}[\overset{\circ}{\sigma}];$$

beachtet man dagegen, dass die auf der rechten Seite der zweiten Gleichung stehende in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n^p hat, wenn die in ihr vorkommenden Zahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ den Congruenzen (C.) genügen, dass dieses bei der Ausführung der Summation nach den ϱ im Ganzen s-mal eintritt, und dass für jedes dieser Zahlensysteme $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ die vor der eingeklammerten Summe stehende Exponentialgrösse den Werth 1 besitzt, so erkennt man, dass aus der zweiten Gleichung:

$$S = sn^p$$

folgt, und erhält durch Vergleichung der beiden Resultate die gewünschte Beziehung:

$$G[\overset{\circ}{\sigma}]G[\overset{\circ}{\sigma}] = sn^p.$$

Ueber eine Anzahlbestimmung und eine damit zusammenhängende Reihe.

(Von Herrn *Georg Landsberg.*)

Betrachtet man zwei rechteckige (oder quadratische) Systeme von s Zeilen und t Colonnen mit ganzzahligen Elementen:

$$(a_{ik}) \text{ und } (b_{ik}) \qquad \binom{i=1,2,\ldots,s}{k=1,2,\ldots,t}$$

als äquivalent, sobald die st Congruenzen:

$$a_{ik} \equiv b_{ik} \qquad \binom{i=1,2,\ldots,s}{k=1,2,\ldots,t}$$

modulo einer Primzahl p erfüllt sind, so giebt es eine endliche Anzahl, nämlich p^{st}, nicht äquivalenter Systeme, und es entsteht die Frage, wie viele von diesen Systemen modulo p den Rang r haben.

Bezeichnet man diese Anzahl mit $\Phi(s,t,r)$, so ist offenbar:

$$\Phi(s, t, 0) = 1$$

und $\Phi(s,t,r) = 0$, wenn r grösser als eine der beiden Zahlen s oder t ist. Da ferner jedes System der verlangten Beschaffenheit nach Weglassung der letzten Zeile den Rang r oder den Rang $r-1$ hat, so erhält man ohne Schwierigkeit für die Function $\Phi(s, t, r)$ die charakteristische Gleichung:

$$(\mathfrak{A}.) \quad \Phi(s, t, r) = p^r\Phi(s-1, t, r)+(p^t-p^{r-1})\Phi(s-1, t, r-1).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung findet man folgende Bestimmung der Function $\Phi(s,t,r)$:

$$(\mathfrak{B}.) \qquad \Phi(s, t, r) = \prod_{\alpha}(p^t-p^{\alpha})\frac{p^{s-\alpha}-1}{p^{\alpha+1}-1}\cdot \qquad (\alpha=0,1,2,\ldots,r-1)$$

Offenbar erfüllt diese Function die Gleichung:

$$(\mathfrak{C}.) \qquad \sum_r \Phi(s, t, r) = p^{st}, \qquad (r=0,1,2,\ldots,s)$$

in welcher $t \geqq s$ angenommen ist. Diese Gleichung hört aber nicht auf zu gelten, sobald man in $\Phi(s,t,r)$ die Grösse p als *Variable* betrachtet,

weil zwei ganze Functionen, die für alle Primzahlen übereinstimmen, identisch gleich sind. Die Gleichung bleibt selbst dann noch richtig, wenn t eine beliebige Zahl ist. Denn setzt man:

$$\sum_{r=0}^{r=s} \Phi(s,\ t,\ r) = \psi(s,\ t),$$

so beweist man zunächst, dass für die *durch die Gleichung* (𝔅.) *definirte* Function $\Phi(s, t, r)$ die Gleichung (𝔄.) gilt, und hieraus leitet man leicht die Relation:

$$\psi(s,\ t) = p^t \psi(s-1,\ t)$$

ab, aus welcher durch Iteration:

$$\psi(s,\ t) = p^{st}\psi(0,\ t) = p^{st}$$

folgt.

Aus der Gleichung (ℭ.) kann schliesslich eine bekannte Beziehung zwischen einem unendlichen Producte und einer unendlichen Summe hergeleitet werden, indem man $t = s+N-1$ setzt und für $s = \infty$ zur Grenze übergeht. Man erhält so, wenn der absolute Betrag von:

$$q = \frac{1}{p}$$

kleiner als Eins ist, die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(1-q^N)(1-q^{N+1})(1-q^{N+2})\dots} \\ \quad = 1+\dfrac{q^N}{1-q^N}\,\dfrac{1}{1-q}+\dfrac{q^{2(N+1)}}{(1-q^N)(1-q^{N+1})}\,\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)} \\ \quad\quad +\dfrac{q^{3(N+2)}}{(1-q^N)(1-q^{N+1})(1-q^{N+2})}\,\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots, \end{cases}$$

welche, wenn $q^{N-1} = z$ gesetzt wird, in die Formel (2.) des Art. 64 in *Jacobis* Fundamenta übergeht.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen.

(Von Herrn *G. Wallenberg.*)

Eine Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(1.)\qquad D(y) = y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0,$$

in welcher die p_i algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen z sind und $p_m \neq 0$ vorausgesetzt ist, habe die Eigenschaft, dass zwischen den m Fundamentalintegralen derselben $y_1, y_2, \ldots, y_m$ $m-1$ algebraische Relationen mit constanten Coefficienten bestehen*):

$$(2.)\qquad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ f_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Denkt man sich aus diesen Gleichungen der Reihe nach von den $m-1$ Grössen $y_2, y_3, \ldots, y_m$ je $m-2$ eliminirt, so erhält man Relationen der Form:

$$(2'.)\qquad \begin{cases} y_2 = \varphi_1(y_1), \\ y_3 = \varphi_2(y_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_k = \varphi_{k-1}(y_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = \varphi_{m-1}(y_1). \end{cases}$$

Durch Differentiation von

$$y_k = \varphi_{k-1}(y_1) \qquad (k = 2, 3, \ldots, m)$$

---

*) Es sei hier bemerkt, dass aus der Existenz von $m-1$ beliebigen algebraischen Relationen das Bestehen von $m-2$ *homogenen* Relationen folgt.

erhält man:

$$y_k' = \varphi_{k-1}'(y_1)y_1'\,^{*)},$$
$$y_k'' = \varphi_{k-1}''(y_1)y_1'^2+\varphi_{k-1}'(y_1)y_1'',$$
$$y_k''' = \varphi_{k-1}'''(y_1)y_1'^3+3\varphi_{k-1}''(y_1)y_1'y_1''+\varphi_{k-1}'(y_1)y_1''',$$

allgemein:

$$y_k^{(\nu)} = \varphi_{k-1}^{(\nu)}(y_1)y_1'^\nu+\varphi_{k-1}^{(\nu-1)}(y_1)[\ldots]+\varphi_{k-1}^{(\nu-2)}(y_1)[\ldots]+\cdots+\varphi_{k-1}'(y_1)y_1^{(\nu)}.$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

Setzt man diese Werthe für $y_k^{(\nu)}$ in die Differentialgleichung (1.) ein, so ergiebt sich unter Berücksichtigung von

$$D(y_1) = 0$$

folgendes Gleichungssystem:

$$D(y_k) = \varphi_{k-1}^{(m)}(y_1)y_1'^m+\varphi_{k-1}^{(m-1)}(y_1)[\ldots]+\cdots+\varphi_{k-1}''(y_1)[\ldots]+p_m(\varphi_{k-1}-y_1\varphi_{k-1}') = 0.$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m)$$

Eliminirt man aus diesen $m-1$ Gleichungen der Reihe nach die $m-2$ Coefficienten von $\varphi_{k-1}''(y_1), \ldots, \varphi_{k-1}^{(m-1)}(y_1)$, welche in allen Gleichungen des linearen Systems dieselben sind, so erhält man eine Relation der Form:

$$G(y_1).y_1'^m = p_m,$$

wo $G(y_1)$ eine algebraische Function von y_1 bedeutet, die sich aus y_1 und aus den algebraischen Functionen φ_{k-1} nebst ihren m ersten Ableitungen rational zusammensetzt.

Um eine zweite Gleichung zwischen z, y_1 und y_1' zu erhalten, bilde ich die Quotienten

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\varphi_1(y_1)}{y_1}, \quad \frac{y_3}{y_1} = \frac{\varphi_2(y_1)}{y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{y_m}{y_1} = \frac{\varphi_{m-1}(y_1)}{y_1}.$$

Die Ableitungen derselben

$$\frac{d}{dz}\frac{y_2}{y_1} = \eta_{1_1}, \quad \frac{d}{dz}\frac{y_3}{y_1} = \eta_{1_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dz}\frac{y_m}{y_1} = \eta_{1_{m-1}},$$

welche als Functionen von y_1 und y_1' die Gestalt haben:

$$\eta_{1_k} = \frac{y_1\varphi_k'(y_1)-\varphi_k(y_1)}{y_1^2}.y_1' = \chi_{1_k}(y_1).y_1', \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

sind bekanntlich Integrale einer Differentialgleichung $(m-1)$ter Ordnung.

---

*) Der Accent bedeutet die Ableitung nach dem Argument, also:

$$y_k' = \frac{dy_k}{dz}, \quad y_k'' = \frac{d^2y_k}{dz^2} \text{ etc.}, \quad \varphi_{k-1}'(y_1) = \frac{d\varphi_{k-1}(y_1)}{dy_1}, \quad \varphi_{k-1}''(y_1) = \frac{d^2\varphi_{k-1}(y_1)}{dy_1^2} \text{ etc.}$$

Ich bilde nun wieder die Quotienten derselben

$$\frac{\eta_{1_k}}{\eta_{1_1}} = \frac{\chi_{1_k}(y_1)}{\chi_{1_1}(y_1)} \qquad (k=2,3,\ldots,m-1)$$

und deren Ableitungen

$$\frac{d}{dz}\frac{\eta_{1_k}}{\eta_{1_1}} = \chi_{2_{k-1}}(y_1).y_1' = \eta_{2_{k-1}}. \qquad (k=2,3,\ldots,m-1)$$

Die $\eta_{2_{k-1}}$ sind Integrale einer Differentialgleichung $(m-2)$ter Ordnung. Es werden nun wieder die Ableitungen der Quotienten derselben gebildet:

$$\frac{d}{dz}\frac{\eta_{2_{k-1}}}{\eta_{2_1}} = \chi_{3_{k-2}}(y_1)y_1' = \eta_{3_{k-2}}, \qquad (k=3,4,\ldots,m-1)$$

welche Integrale einer Differentialgleichung $(m-3)$ter Ordnung sind, etc., etc. Man erhält so successive $m-1$ Systeme von Fundamentalintegralen von Differentialgleichungen resp. $(m-1)$ter, $(m-2)$ter, ..., 2ter, 1ter Ordnung:

$$\begin{array}{llll}
\eta_{1_1}, & \eta_{1_2}, & \ldots, & \eta_{1_{m-1}}, \\
\eta_{2_1}, & \eta_{2_2}, & \ldots, & \eta_{2_{m-2}}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\eta_{m-2_1}, & \eta_{m-2_2}, & & \\
\eta_{m-1_1}, & & &
\end{array}$$

und es ist allgemein

$$\eta_{i_k} = \chi_{i_k}(y_1).y_1',$$

wo die $\chi_{i_k}(y_1)$ ihrer Bildungsweise nach algebraische Functionen von y_1 sind, die sich aus y_1 und aus den algebraischen Functionen $\varphi_k(y_1)$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(m-1)$ten Ordnung rational zusammensetzen.

Wir benutzen jetzt die bekannte Relation*)

$$y_1^m \eta_{1_1}^{m-1} \eta_{2_1}^{m-2} \ldots \eta_{m-2_1}^2 \eta_{m-1_1} = \Delta,$$

d. i. hier:

$$y_1^m.[\chi_{1_1}(y_1)y_1']^{m-1}.[\chi_{2_1}(y_1)y_1']^{m-2} \ldots [\chi_{m-2_1}(y_1)y_1']^2.\chi_{m-1_1}(y_1)y_1' = \Delta$$

oder, wenn

$$y_1^m\chi_{1_1}(y_1)^{m-1}\chi_{2_1}(y_1)^{m-2} \ldots \chi_{m-2_1}(y_1)^2\chi_{m-1_1}(y_1) = F(y_1)$$

gesetzt wird:

$$F(y_1)y_1'^{\frac{m(m-1)}{2}} = \Delta.$$

---

*) *Fuchs:* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen etc., dieses Journal, Bd. 66, pag. 130, Gleichung (9.).

Oben hatten wir gefunden:

$$G(y_1)y_1'^m = p_m.$$

Durch Elimination von y_1' aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir im Falle eines ungeraden m:

$$(3.) \qquad \frac{F(y_1)}{G(y_1)^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{\Delta}{p_m^{\frac{m-1}{2}}},$$

im Falle eines geraden m:

$$(3'.) \qquad \frac{F(y_1)^2}{G(y_1)^{m-1}} = \frac{\Delta^2}{p_m^{m-1}}.$$

Diese Gleichungen ergeben *im allgemeinen* y_1, also in Folge der Relationen (2.) auch $y_2, \dots, y_m$ als algebraische Functionen von z und Δ. Ist ausserdem p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (1.) algebraische Functionen von z, da bekanntlich

$$\Delta = Ce^{-\int p_1 dz}$$

ist.

Die Gleichungen (3.) resp. (3'.) zeigen gleichzeitig, welchen Einfluss die Relationen (2.) auf die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) haben und umgekehrt. Zunächst sieht man, dass in (3.) resp. (3'.) nur die Coefficienten p_1 und p_m eingehen; wenn also diese Gleichung wirklich eine algebraische Beziehung zwischen y_1 und z ergiebt, so folgt aus den über p_1 und p_m gemachten Voraussetzungen und aus der Existenz der Relationen (2.) bereits die algebraische Natur der übrigen Coefficienten der Differentialgleichung (1.). Ist ferner $\frac{\Delta^2}{p_m^{m-1}}$ eine Constante — die übrigens wegen $\Delta \neq 0$ und $p_m \neq 0$ weder 0 noch ∞ sein darf —, so muss auch $\frac{F^2(y_1)}{G(y_1)^{m-1}}$ eine Constante sein und umgekehrt, da sich sonst entweder y_1 als eine wegen $\Delta \neq 0$ von Null verschiedene Constante ergeben würde, was der Voraussetzung $p_m \neq 0$ widerspricht, oder aber $z = \text{Const.}$, was keinen Sinn hat. Dieser Fall aber, wo jede Seite für sich genommen constant ist, ist gerade der Ausnahmefall, in welchem die Gleichungen (3.) resp. (3'.) *keine* algebraische Beziehung ergeben. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Wenn in einer linearen homogenen Differentialgleichung mter Ordnung

der Coefficient der 0ten Ableitung eine algebraische Function, der Coefficient der $(m-1)$ten Ableitung die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function der unabhängigen Veränderlichen ist, die sich von der $\frac{m-1}{2}$ten Potenz des ersteren Coefficienten nicht durch eine blosse Constante unterscheidet, und wenn zwischen den Integralen eines Fundamentalsystems derselben $m-1$ algebraische Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, so sind ihre Integrale algebraisch.

Ist $p_m = 0$, so besteht zwischen den Integralen eines Fundamentalsystems eine Relation der Form

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_m y_m = C,$$

wo die c_i und C Constanten sind; diese Relation muss eine Folge der Relationen (2.) sein, da sich sonst *alle* Integrale der Differentialgleichung (1.) als Constanten ergeben würden. Setzt man daher $\frac{dy}{dz} = u$, so kann *eine* der Relationen (2.) fortgelassen werden, und man erhält für u eine lineare homogene Differentialgleichung $(m-1)$ter Ordnung von der Beschaffenheit, dass zwischen den Integralen eines Fundamentalsystems derselben $m-2$ Relationen der Form

$$f_k\left(\int u_1 dz, \int u_2 dz, \ldots, \int u_{m-1} dz\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-2)$$

bestehen. — In diesem Falle lässt sich über die algebraische Integrirbarkeit der Differentialgleichung (1.) nichts aussagen; so erhält man z. B. für den Fall $m = 2$ für u eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral einer weiteren Bedingung nicht unterliegt.

Es leuchtet ein, dass die Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen zu den in dieser Arbeit betrachteten gehören, da zwischen ihren Integralen die Relationen (2'.) bestehen; für dieselben gelten daher die Gleichungen (3.) resp. (3'.)

Die allgemeine Behandlung des oben angedeuteten Ausnahmefalles, in welchem jede Seite der Gleichung (3.) resp. (3'.) für sich constant ist, behalte ich mir für eine spätere Gelegenheit vor und will denselben hier nur für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigen. Die Gleichung

$$\frac{F(y_1)^2}{G(y_1)^{m-1}} = C$$

oder

$$F(y_1)^2 - C.G(y_1)^{m-1} = 0$$

ist nämlich als Differentialgleichung für die Functionen $\varphi_k(y_1)$ aufzufassen; im Falle $m=2$ haben wir nur *eine* Function $y_2=\varphi_1(y_1)$, hier wird also diese Differentialgleichung eine gewöhnliche, und es gelingt, durch directe Integration derselben den algebraischen Charakter der Function φ_1 zu ermitteln; die Betrachtung der rechten Seite

$$\frac{\Delta^2}{p_m^{m-1}} = C$$

führt zu demselben Resultat.

Zwischen den Fundamentalintegralen y_1 und y_2 der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dz^2}+p_1\frac{dy}{dz}+p_2y = 0 \tag{4.}$$

möge die algebraische Relation mit constanten Coefficienten bestehen:

$$F(y_1, y_2) = 0 \tag{5.}$$

oder:

$$y_2 = f(y_1), \tag{5'.}$$

wo f eine algebraische Function von y_1 bedeutet. Durch Differentiation von (5'.):

$$\frac{dy_2}{dz} = f'(y_1)\frac{dy_1}{dz},$$

$$\frac{d^2y_2}{dz^2} = f''(y_1)\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2+f'(y_1)\frac{d^2y_1}{dz^2}$$

ergiebt sich unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (4.):

$$\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 = p_2\frac{y_1f'(y_1)-f(y_1)}{f''(y_1)}. \tag{6.}$$

Ferner ist:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{f(y_1)}{y_1},$$

also:

$$y_1^2\frac{d}{dz}\frac{y_2}{y_1} = C_1e^{-\int p_1dz} = (y_1f'(y_1)-f(y_1))\frac{dy_1}{dz}. \tag{7.}$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus (6.) und (7.) erhält man:

$$C\frac{e^{-2\int p_1dz}}{p_2} = \frac{(y_1f'(y_1)-f(y_1))^2}{f''(y_1)}. \tag{8.}$$

Dies ist eine algebraische Beziehung zwischen y_1, p_2 und $e^{\int p_1dz}$; ist also p_2

eine algebraische Function und p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function von z, so ist y_1, also wegen (5.) auch y_2, eine algebraische Function von z.

Diese Beziehung kann illusorisch werden:

I. wenn $f''(y_1) = 0$, also $y_2 = c_1 y_1 + c_2$ und $p_2 = 0$ ist; die Differentialgleichung (4.) lautet in diesem Falle:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} = 0$$

und ist nun keiner weiteren Bedingung unterworfen, da die Relation $y_2 = c_1 y_1 + c_2$ hier von selbst erfüllt ist. Ihr allgemeines Integral ist

$$y = c_1 \int e^{-\int p_1 dz} dz + c_2;$$

dasselbe braucht nicht algebraisch zu sein.

II. wenn $y_1 f'(y_1) - f(y_1) = 0$, also $C = 0$ ist; in diesem Falle lautet die Relation $y_2 = c y_1$, d. h. y_1 und y_2 würden kein Fundamentalsystem bilden. Dieser Fall ist also auszuschliessen.

III. wenn der Quotient $\frac{(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^2}{f''(y_1)}$ eine von Null verschiedene Constante wird; dann wird auch die linke Seite von (8.) eine Constante, also:

$$p_2 = c e^{-2\int p_1 dz}$$

oder

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{p_2'}{p_2}.$$

Die Differentialgleichung (4.) lautet dann, wenn noch $-p_2$ an Stelle von p_2 geschrieben wird:

$$\text{(9.)} \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{2} \frac{p_2'}{p_2} \frac{dy}{dz} - p_2 y = 0.$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung ist:

$$\eta_1 = e^{+\int \sqrt{p_2} dz}, \quad \eta_2 = e^{-\int \sqrt{p_2} dz};$$

dieselben genügen der Relation:

$$\eta_1 . \eta_2 = 1.$$

Die Integrale brauchen in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein*).

---

*) Cfr. *Fuchs:* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen etc., dieses Journal, Bd. 81, S. 117 und 118.

Dies findet man auch durch Betrachtung der rechten Seite von (8.); es sei der dort stehende Quotient gleich der Constanten $-a$, also:

$$(10.)\qquad (y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3 + a f''(y) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $f(y_1)$; um $f(y_1)$ daraus zu bestimmen, setze man:

$$(11.)\qquad y_1 f'(y_1) - f(y_1) = u,$$

dann wird

$$y_1 f''(y_1) = \frac{du}{dy_1};$$

also ergiebt sich aus (10.):

$$u^3 + a\frac{1}{y_1}\frac{du}{dy_1} = 0$$

oder:

$$-a\frac{du}{u^3} = y_1 dy_1.$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{a}{2}\frac{1}{u^2} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{C_2}{2}$$

d. h.

$$u = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}},$$

also wegen (11.):

$$y_1 f'(y_1) - f(y_1) = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}$$

oder:

$$f'(y_1) - \frac{1}{y_1} f(y_1) - \frac{1}{y_1}\sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}} = 0.$$

Die nochmalige Integration ergiebt:

$$f(y_1) = C_1 y_1 + y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}\, dy_1$$

oder:

$$y_2 = f(y_1) = C_1 y_1 - \frac{\sqrt{a}}{C_2}\cdot\sqrt{C_2 + y_1^2}$$

d. h.

$$(y_2 - C_1 y_1)^2 = \frac{a}{C_2^2}\cdot(C_2 + y_1^2)$$

oder:

$$(12.)\qquad y_2^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_1^2 = a_3,$$

worin $a_1 = -C_1$, $a_2 = C_1^2 - \frac{a}{C_2^2}$, $a_3 = \frac{a}{C_2}$ ist; da C_1, C_2 und a willkürlich, so sind auch a_1, a_2 und a_3 willkürliche Constanten. — Hier ist also eine binäre Form zweiten Grades der Fundamentalintegrale gleich einer Constanten. (Cfr. S. 95, Anm.)

Schreibt man die Relation:

$$(y_2+\alpha y_1)(y_2+\beta y_1) = a_3$$

und setzt

$$\frac{1}{a_3} y_2 + \frac{\alpha}{a_3} y_1 = \eta_1, \quad y_2+\beta y_1 = \eta_2,$$

so erhält man sie in der bereits oben gefundenen Form:

$$\eta_1 . \eta_2 = 1.$$

Ueber eine allgemeine Formel zur Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems.

(Von Herrn *H. Stahl* in Tübingen.)

Das *Jacobi*sche Umkehrproblem, in welchem p Summen von p Integralen erster Gattung mit den oberen Grenzpunkten $x_1, \ldots, x_p$ gleich p Grössen $U_1, \ldots, U_p$ gesetzt sind, besteht im engeren Sinne in der Aufgabe, die Coordinaten der p Punkte x_i durch die p Grössen U_h darzustellen. Im weiteren Sinne umfasst es die beiden folgenden Aufgaben:

1) Thetaquotienten mit den Argumenten U_h algebraisch und symmetrisch durch die Coordinaten der p Punkte x_i darzustellen;

2) Den Logarithmus einer Thetafunction mit den Argumenten U_h symmetrisch durch *Abel*sche Integrale und algebraische Functionen in den Punkten x_i darzustellen.

Die erste Aufgabe kann gesondert behandelt, aber auch als in der zweiten enthalten betrachtet werden. Beide Aufgaben sind von *Riemann*, wenn auch kurz doch vollständig, gelöst worden. Diese Lösungen lassen mannigfache Formen zu. In den folgenden Zeilen soll eine allgemeine Formel hergeleitet werden, aus der sich andere bis jetzt gegebene Darstellungen als specielle Fälle unmittelbar ergeben.

Ich schicke zur Orientirung einige Bemerkungen voraus. Es sei $F(x, y) = 0$ eine Curve vom Grade n und vom Geschlecht p mit r Doppelpunkten $\delta_1, \ldots, \delta_r$. Die Verzweigung von y als Function von x sei dargestellt durch eine n-blättrige Fläche T mit den $2p$ Querschnitten a_h und b_h $(h = 1, \ldots, p)$. Ein Punkt mit den Coordinaten (x, y) sei kurz durch x bezeichnet. Ferner seien

$$(1.)\qquad \int_{a_0}^{x} du_h = u_h^x \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

die p Normalintegrale erster Gattung (mit beliebigem unterem Grenzpunkt

α_0), so dass u_h^x an den Querschnitten a_i den Periodicitätsmodul 0, nur an a_h den Modul πi hat und dass die Moduln von u_h^x an den Schnitten $b_1, \ldots, b_p$ gleich $a_{h1}, \ldots, a_{hp}$ sind, wobei $a_{hk} = a_{kh}$. Endlich sei die Thetafunction mit den p Argumenten $v_1, \ldots, v_p$ und dem Modulsystem a_{hk} durch $\vartheta(v_1, \ldots, v_p)$ oder kurz durch $\vartheta(v)$ bezeichnet, so dass

$$\text{(2.)} \qquad \vartheta(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_p} e^{\sum\limits_{h=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{p} a_{hk} n_h n_k + 2\sum\limits_{h=1}^{p} n_h v_h}.$$

Ein Zahlencomplex

$$(\mu) = (\mu_1, \ldots, \mu_p; \ \mu'_1, \ldots, \mu'_p)$$

heisst, wenn die Zahlen μ, μ' alle Werthe $0, 1, \ldots, m-1$ annehmen können, eine m-theilige Charakteristik und

$$\text{(4.)} \qquad M_h = \mu'_h \pi i + \sum_{k=1}^{p} a_{hk} \mu_k \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

das zugehörige System von Periodicitätsmoduln.

Die Thetafunction mit der m-theiligen Charakteristik μ ist definirt durch

$$\text{(5.)} \qquad \vartheta_\mu(v) = C.e^{-\frac{2}{m}\sum\limits_h \mu_h v_h} \vartheta\left(v_1 - \frac{1}{m} M_1, \ \ldots, \ v_p - \frac{1}{m} M_p\right),$$

wo C eine von den v_h unabhängige Constante ist. Die p Nullpunkte der Function $\vartheta(u^x)$ seien mit $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_p^0$, die der Function $\vartheta_\mu(u^x)$ mit $\alpha_1^\mu, \ldots, \alpha_p^\mu$ bezeichnet. Diese Punktsysteme sind verbunden durch die Congruenzen

$$\text{(6.)} \qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv \frac{1}{m} M_h. \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

Demnach sind die p Nullpunkte $x_1, \ldots, x_p$ der Function $\vartheta_\mu(u^x - e)$ bestimmt durch die Congruenzen

$$\text{(7.)} \qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^\mu}^{x_i} du_h \equiv e_h. \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

Für die algebraische Bestimmung der von α_0 abhängigen Punktsysteme $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_p^0$ und $\alpha_1^\mu, \ldots, \alpha_p^\mu$ gilt Folgendes, wobei der Fall $m = 2$ ein besonderes Verhalten zeigt, weil die Thetafunctionen mit zweitheiliger Charakteristik entweder gerade oder ungerade sind.

Eine Curve $\varphi(x) = 0$ vom Grade $n-3$, die durch die r Doppel-

punkte δ von $F=0$ geht*), soll eine φ-Curve heissen; eine Curve $\psi(x)=0$ vom Grade $n-2$, die durch die r Doppelpunkte δ und durch die $n-2$ Punkte geht, in welchen die Tangente des Punktes α_0 die Curve $F=0$ ausser α_0 noch schneidet**), eine ψ-Curve. Ist $m=2$ und bestimmt man die $p+1$ noch freien, linearen, homogenen Coefficienten einer ψ-Curve so, dass sie die Curve $F=0$ in p Punkten berührt, so entspricht jeder der 2^{2p} zweitheiligen Charakteristiken μ eindeutig eine solche Berührungscurve $\psi_\mu(x)=0$, der Charakteristik 0 eine Curve $\psi_0(x)=0$, deren Berührungspunkte die oben erwähnten Punkte $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_p^0$ sind, der Charakteristik μ eine Curve $\psi_\mu(x)=0$, deren Berührungspunkte die Punkte $\alpha_1^\mu, \ldots, \alpha_p^\mu$ sind. Ist μ eine ungerade Charakteristik, so zerfällt die Curve $\psi_\mu(x)=0$ in die Tangente des Punktes α_0, deren Gleichung $(\alpha_0 x)=0$ sei, und eine von α_0 unabhängige, F in $p-1$ Punkten $\alpha_1^\mu, \ldots, \alpha_{p-1}^\mu$ berührende φ-Curve $\varphi_\mu(x)=0$, so dass für eine ungerade Charakteristik μ $\psi_\mu(x)=(\alpha_0 x).\varphi_\mu(x)$ wird.

Um ferner das der m-theiligen Charakteristik μ zugehörige Punktsystem $\alpha_1^\mu, \ldots, \alpha_p^\mu$ zu erhalten, lege man durch die r Doppelpunkte δ von $F=0$ eine Curve $\Psi_0(x)=0$, die F in den p Punkten α_i^0 je $(m-1)$-punktig berührt (d. h. je in m zusammenfallenden Punkten schneidet). Die übrigen s Schnittpunkte derselben seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Dann lassen sich durch die r Doppelpunkte δ und die s Punkte ε im Ganzen (Ψ_0 inbegriffen) m^{2p} Curven $\Psi(x)=0$ desselben Grades legen, die $F=0$ in p Punkten je $(m-1)$-punktig berühren. Jeder m-theiligen Charakteristik μ entspricht eine solche Curve $\Psi_\mu(x)=0$, deren Berührungspunkte die p Nullpunkte α_i^μ der zugehörigen Function $\vartheta_\mu(u^x)$ sind.

Zwischen den Functionen $\vartheta_\mu(u^x)$ und $\sqrt[m]{\Psi_\mu(x)}$ besteht die Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{\vartheta_\mu(u^x)}{\vartheta_\nu(u^x)} = \frac{C_\mu}{C_\nu}\sqrt[m]{\frac{\Psi_\mu(x)}{\Psi_\nu(x)}},$$

in der μ und ν zwei verschiedene, m-theilige Charakteristiken sind und $C_\mu : C_\nu$ eine von x unabhängige Constante ist. Für $m=2$ treten an Stelle der Functionen Ψ die Functionen ψ.

Die in (8.) auftretenden Wurzelfunctionen $\sqrt[m]{\Psi_\mu(x)}$ sollen für den

*) *Riemann*, Ges. Werke S. 110.

**) *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abel*schen Functionen S. 197.

späteren Gebrauch noch verallgemeinert werden. Man lege durch die r Doppelpunkte δ von $F=0$ eine Curve $\chi_0(x,c)=0$, die F in g beliebig gegebenen Punkten $c_1, \ldots, c_g$ je $(m-1)$-punktig berührt, und bezeichne die übrigen s Schnittpunkte derselben mit $F=0$ durch $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Legt man dann durch die r Punkte δ und die s Punkte ε eine Curve von demselben Grade, die $F=0$ in $g-p$ beliebigen Punkten a_i $(i=1, \ldots, g-p)$ je $(m-1)$-punktig berührt, so lassen sich die noch freien Coefficienten so bestimmen, dass die Curve in weiteren p Punkten je $(m-1)$-punktig berührt. Jeder der m^{2p} m-theiligen Charakteristiken μ entspricht eindeutig eine solche Berührungscurve $\chi_\mu(x,a)$ mit p bestimmten letzten Berührungspunkten.

Die zu denselben festen r Punkten δ und s Punkten ε gehörigen Functionen $\sqrt[m]{\chi_\mu(x,a)}$ sollen *Wurzelfunctionen gleicher Art*, von dem *Exponenten* m, der *Charakteristik* μ und *der Ordnung* g heissen. Für diese Functionen gilt u. A. der Satz: Eine Wurzelfunction von dem Exponenten m, der Charakteristik μ und der Ordnung g lässt sich durch ein Aggregat von $g-p+1$ Wurzelfunctionen derselben Art darstellen.

Es ist also

$$(9.)\qquad \sqrt[m]{\chi_\mu(x,\ a)} = \sum_{k=0}^{g-p+1} l_k \sqrt[m]{\chi_\mu(x,\ a^k)}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich aus von der *Riemann*schen Formel*)

$$(10.)\quad \log \frac{\vartheta_\mu\Big(\int_{a_0}^{x_0} du - \sum\limits_i \int_{a_i^\mu}^{\xi_i} du\Big)\cdot \vartheta_\mu\Big(\int_{a_0}^{y_0} du - \sum\limits_i \int_{a_i^\mu}^{\eta_i} du\Big)}{\vartheta_\mu\Big(\int_{a_0}^{x_0} du - \sum\limits_i \int_{a_i^\mu}^{\eta_i} du\Big)\cdot \vartheta_\mu\Big(\int_{a_0}^{y_0} du - \sum\limits_i \int_{a_i^\mu}^{\xi_i} du\Big)} = \sum_{i=1}^{p} \int_{\eta_i}^{\xi_i} d\omega_{y_0 x_0},$$

in welcher μ eine beliebige m-theilige Charakteristik, ξ_i und η_i $(i=1,\ldots,p)$ sowie x_0, y_0 beliebig gegebene Punkte sind und $\omega_{y_0 x_0}$ ein nach *Riemann* normirtes Integral dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten y_0 und x_0 ist. Die linke Seite der Gleichung (10.) enthält p-gliedrige Integralsummen, deren obere Grenzpunkte beliebig sind, während die unteren Grenzpunkte

*) *Riemann*, Ges. Werke S. 131. Man beweist diese Formel, wenn $F(x,y)=0$ gegeben ist, auch ohne das *Dirichlet*sche Princip zu benutzen, aus dem Satze, dass eine in der Verzweigungsfläche T allenthalben stetige Function des Ortes eine Constante ist.

α_i^μ von dem willkürlichen Punkte α_0 in der oben angegebenen Weise abhängen. Mit Hülfe des *Abel*schen Theorems gewinnt die Gleichung (10.) eine symmetrischere und allgemeinere Form. Versteht man nämlich unter $x_1, \dots, x_q;\ y_1, \dots, y_q;\ \alpha_1, \dots, \alpha_q$ drei Systeme von je q beliebigen Punkten und definirt die p Punkte ξ_i und η_i in (10.) durch die Congruenzen

$$(11.)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^{q}\int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv 0,\quad \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du_h + \sum_{k=1}^{q}\int_{\alpha_k}^{y_k} du_h \equiv 0,\quad (h=1,\dots,p)$$

so folgt

$$(12.)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{\eta_i}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^{q}\int_{y_k}^{x_k} du_h \equiv 0.$$

Legt man daher durch die r Doppelpunkte δ von $F=0$, durch die p Punkte α_i^μ und die q Punkte α_k eine Curve $\chi_\mu(x)=0$, die $F=0$ noch in t Punkten $\zeta_1, \dots, \zeta_t$ schneide, und bestimmt eine weitere Curve desselben Grades $\chi_\mu(x, x_1, \dots, x_q)=0$ so, dass sie $F=0$ in den r Punkten δ, den t Punkten ζ und den q Punkten $x_1, \dots, x_q$ schneidet, so folgt nach dem *Abel*schen Theorem für das Integral dritter Gattung $\omega_{y_0 x_0}$ aus (12.)

$$(13.)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{\eta_i}^{\xi_i} d\omega_{y_0 x_0} + \sum_{k=1}^{q}\int_{y_k}^{x_k} d\omega_{y_0 x_0} = \log\frac{\chi_\mu(x_0, x_1, \dots, x_q)\chi_\mu(y_0, y_1, \dots, y_q)}{\chi_\mu(x_0, y_1, \dots, y_q)\chi_\mu(y_0, x_1, \dots, x_q)}.$$

Ersetzt man nun in (10.) die Punkte ξ_i und η_i nach (11.) und (13.) durch die Punkte x_k und y_k und schreibt zur Abkürzung

$$(14.)\qquad \begin{cases} \left(\int_{\alpha_0}^{x_k} du_1, \dots, \int_{\alpha_0}^{x_k} du_p\right) = ((x_k)), \\ \left(\sum_{k=0}^{q}\int_{\alpha_k}^{x_k} du_1, \dots, \sum_{k=0}^{q}\int_{\alpha_k}^{x_k} du_p\right) = ((x_0, x_1, \dots, x_q)), \end{cases}$$

so erhält man

$$(15.)\qquad \begin{cases} \log\dfrac{\vartheta_\mu((x_0, x_1, \dots, x_q))\vartheta_\mu((y_0, y_1, \dots, y_q))}{\vartheta_\mu((x_0, y_1, \dots, y_q))\vartheta_\mu((y_0, x_1, \dots, x_q))} \\ = \sum_{k=1}^{q}\int_{y_k}^{x_k} d\omega_{x_0 y_0} + \log\dfrac{\chi_\mu(x_0, x_1, \dots, x_q)\chi_\mu(y_0, y_1, \dots, y_q)}{\chi_\mu(x_0, y_1, \dots, y_q)\chi_\mu(y_0, x_1, \dots, x_q)} \end{cases}$$

oder, wenn man die willkürlichen Punkte $y_0, y_1, \dots, y_q$ gleich $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ setzt, den von x_0 unabhängigen Theil absondert und den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument anwendet:

$$\log\vartheta_\mu((x_0, x_1, \dots, x_q)) - \log\vartheta_\mu((x_0))$$
$$= \sum_{k=1}^{q}\int_{\alpha_0}^{x_0} d\omega_{x_k \alpha_k} + \log\chi_\mu(x_0, x_1, \dots, x_q) - \log\chi_\mu(x_0) + C_\mu,$$

wo C_μ eine von x_0 unabhängige Grösse ist. Durch Hinzufügung von Gliedern, die ebenfalls unabhängig von x_0 sind, erhält man

$$(16.)\quad \begin{cases} \log\vartheta_\mu((x_0, x_1, \ldots, x_q)) - \sum\limits_{k=0}^{q} \log\vartheta_\mu((x_k)) \\ = \sum\limits_{i=0}^{q}\sum\limits_{k=0}^{q}{}' \int\limits_{a_k}^{x_k} d\omega_{x_i a_i} + \log\chi_\mu(x_0, x_1, \ldots, x_q) - \sum\limits_{k=0}^{q} \chi_\mu(x_k) + A_\mu, \end{cases}$$

wo in der Doppelsumme der rechten Seite die Glieder, für welche $i = k$ ist, ausgeschlossen sind und jede Combination i, k nur einmal zu nehmen ist, was durch das Komma an dem Summenzeichen angedeutet sei. Die Grösse A_μ ist unabhängig von $x_0, x_1, \ldots, x_q$, da die Ausdrücke auf beiden Seiten für diese Punkte symmetrisch gebildet sind.

Es bleibt noch $\log\vartheta_\mu((x_k))$ zu bestimmen. Hierzu setze man in (10.) x_k für x_0, ferner $y_0 = \alpha_0$, $\xi_i = \alpha_i^\mu$ und für die p Punkte $\eta_1, \ldots, \eta_p$ p Punkte $b_1^k, \ldots, b_p^k$ definirt durch die Congruenzen

$$(17.)\quad 2\sum_{i=1}^{p} \int\limits_{a_i^0}^{b_i^k} du_h \equiv \int\limits_{a_0}^{x_k} du_h. \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

Dann erhält man (wenn nicht $\vartheta_\mu(0) = 0$, was im Allgemeinen nur für eine ungerade zweitheilige Charakteristik μ der Fall ist,)

$$(18.)\quad \log\vartheta_\mu((x_k)) - \log\vartheta_\mu(0) = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{a_i^\mu}^{b_i^k} d\omega_{x_k a_0}.$$

Die p Punkte b_i^k lassen sich aus (17.) auf 2^{2p} Arten bestimmen; es ist gleichgültig, welches dieser Systeme man wählt. Trägt man die Werthe (18.) ein und setzt noch $x_0 = \alpha_0$, so folgt aus (16.)

$$(19.)\quad \begin{cases} \log\vartheta_\mu((x_1, \ldots, x_q)) \\ = (q+1)\log\vartheta_\mu(0) + \sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{k=1}^{q}{}' \int\limits_{a_k}^{x_k} d\omega_{x_i a_i} + \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{q} \int\limits_{a_i^\mu}^{b_i^k} d\omega_{x_k a_0} \\ \quad + \log\chi_\mu(\alpha_0, x_1, \ldots, x_q) - \log\chi_\mu(\alpha_0) - \sum\limits_{k=1}^{q} \log\chi_\mu(x_k) + A_\mu. \end{cases}$$

Die Constante A_μ bestimmt sich am einfachsten durch die Substitution $x_k = \alpha_k$ $(k = 1, \ldots, q)$, wodurch das System b_i^k in β_i^k übergehe. Da

$$\chi_\mu(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \chi_\mu(x)$$

ist, so erhält man

$$(20.)\qquad 0 = q\log\vartheta_\mu(0) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\int_{\alpha_i^\mu}^{\beta_i^k} d\omega_{a_k a_0} - \sum_{k=1}^{q}\log\chi_\mu(\alpha_k) + A_\mu.$$

Die Gleichungen (19.) und (20.) lösen die zweite der anfangs erwähnten beiden Aufgaben des Umkehrproblems; sie enthalten den Satz:

Der Logarithmus einer Thetafunction mit beliebiger m-theiliger Charakteristik, deren Argumente Integralsummen erster Gattung mit einer beliebigen Zahl q von Gliedern und mit beliebigen oberen und unteren Grenzpunkten x_k und $\alpha_k (k = 1, \dots, q)$ sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch Logarithmen von rationalen Functionen und durch Integrale dritter Gattung, deren Grenz- und Unstetigkeits-Punkte ausser den Punkten x_k und α_k nur noch Punkte enthalten, welche von diesen Punkten algebraisch abhängen.

Gleichzeitig hat man in (16.) eine Lösung der ersten zu Anfang erwähnten Aufgabe. Sind nämlich μ und ν zwei verschiedene m-theilige Charakteristiken, so folgt aus (16.) mit Rücksicht auf (8.)

$$(21.)\qquad \frac{\vartheta_\mu((x_0, x_1, \dots, x_q))}{\vartheta_\nu((x_0, x_1, \dots, x_q))} = \frac{B_\mu}{B_\nu}\,\frac{\chi_\mu(x_0, x_1, \dots, x_q)}{\chi_\nu(x_0, x_1, \dots, x_q)}\prod_{k=0}^{q}\frac{\chi_\nu(x_k)}{\chi_\mu(x_k)}\sqrt[m]{\frac{\Psi_\mu(x_k)}{\Psi_\nu(x_k)}},$$

wo $B_\mu : B_\nu$ unabhängig von $x_0, x_1, \dots, x_q$ ist*).

Aus (16.) lassen sich in mannigfacher Weise specielle Formeln gewinnen. Dabei kann man, wenn die bisher willkürlichen unteren Grenzpunkte der Integrale passend gewählt werden, die rationalen Functionen in (16.) oder (21.) auch durch Wurzelfunctionen ersetzen. Es genügt, zwei solcher Formeln herzuleiten.

Erstens sei m beliebig, aber $q = p$ und $\alpha_k = \alpha_k^0 (k = 1, \dots, p)$. Die Function $\chi_\mu(x, x_1, \dots, x_p) : \chi_\mu(x)$ ist als rationale Function von x definirt durch ihre $2p$ Unendlichkeitspunkte α_k^0 und α_k^μ und durch p ihrer Nullpunkte x_k. Man kann nun den Nenner $\chi_\mu(x)$ ersetzen durch $\sqrt[m]{\Psi_0(x)\Psi_\mu(x)}$. Dies ist eine Wurzelfunction der früher besprochenen Art; sie ist von der Charakteristik μ, von der Ordnung $2p$, verschwindet in den $2p$ Punkten α_k^0 und α_k^μ und ausserdem in gewissen festen Punkten, nämlich in jedem der r Doppel-

---

*) Die Gleichung (21.) habe ich früher (dieses Journal, Bd. 89 S. 183) unter specielleren Voraussetzungen direct aus (8.) abgeleitet und dann (Dissertation, Berlin 1882) für $m = 2$ zur weiteren Discussion des Umkehrproblems verwandt.

(23.) für $x = x_1, \ldots, x_q$ verschwindet, so hat man die zu dem obigen $\chi_\mu(x)$ gehörige Function $\chi_\mu(x, x_1, \ldots, x_q)$. Da $(\alpha_0 x_0) = 0$ wird für $x_0 = \alpha_0$, so erhält man

$$(24.)\qquad \chi_\mu(\alpha_0, x_1, \ldots, x_q) = \sqrt{R_\mu(\alpha_0)} \prod_{k=1}^{q} \sqrt{\alpha_0 x_k} \Sigma \pm \sqrt{S_\mu^1(x_1)} \ldots \sqrt{S_\mu^q(x_q)}.$$

Dieser Ausdruck ist in (16.) einzutragen, nachdem dort $x_0 = \alpha_0$ gesetzt ist. An Stelle von (21.) tritt dann die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu((x_1, \ldots, x_q))}{\vartheta_\nu((x_1, \ldots, x_q))} = \frac{B_\mu}{B_\nu} \frac{\Sigma \pm \sqrt{S_\mu^1(x_1)} \ldots \sqrt{S_\mu^q(x_q)}}{\Sigma \pm \sqrt{S_\nu^1(x_1)} \ldots \sqrt{S_\nu^q(x_q)}}. \qquad q = \varrho(2p-2)$$

Dies ist die Formel, welche zuerst von Herrn *Weber**) für $p = 3$, $q = 4$ aufgestellt und zur Lösung des Umkehrproblems verwerthet, später von den Herren *Nöther***) (für $q = 2p-2$) und *Klein****) (für $q = \varrho(2p-2)$) verallgemeinert wurde.

---

*) *H. Weber*, Theorie der *Abel*schen Functionen für das Geschlecht 3. Berlin 1876. § 24.

**) *M. Nöther*, Math. Ann. Bd. 28, S. 367, 1887.

***) *F. Klein*, Math. Ann. Bd. 36, S. 40, 1890. Die dort eingeführten Functionen $\Omega(x, y)$ und $\mu(x)$ sind nichts anderes als Combinationen von φ-Functionen mit ungeraden Thetafunctionen (l. c. S. 43 u. S. 16). Für allgemeinere Darstellungen, wie sie in den obigen Formeln (19.) und (21.) enthalten sind, reichen diese Functionen $\Omega(x, y)$ und $\mu(x)$ nicht aus.

Drei neue Beweise des Reciprocitätssatzes in der Theorie der quadratischen Reste.

(Von Herrn *Hermann Schmidt* in Stuttgart.)

Vorausbemerkung.

Wo im Folgenden schlechtweg von positiven oder negativen Resten einer (einfachen oder zusammengesetzten) ungeraden Zahl P die Rede ist, sind die Reste immer zwischen $-\frac{P}{2}$ und $+\frac{P}{2}$ genommen.

Erster Beweis.

Wenn p und q zwei ungerade Primzahlen sind und p die grössere derselben ist, so kann man die Differenz $p-q=2n$ und ferner $p=mn+r$, $q=(m-2)n+r$ setzen. Nun ist nach dem *Gauss*schen Lemma n quadratischer Rest oder Nicht-Rest von p, je nachdem in der Reihe der Reste

$$n,\quad 2n,\quad 3n,\quad \ldots,\quad (m-1)n,\quad mn,\quad \ldots,\quad \frac{p-1}{2}n \ (\text{mod.}p)$$

oder

$$n,\quad 2n,\quad 3n,\quad \ldots,\quad -(n+r),\quad -r,\quad (n-r),\quad \ldots$$

die Anzahl der negativen Reste gerade oder ungerade ist.

Da $\frac{p-1}{2}n = p\cdot\frac{n}{2}-\frac{n}{2}$ oder $= p\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{p-n}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so besteht jene Reihe im ersten Falle aus $\frac{n}{2}$, im zweiten aus $\frac{n-1}{2}$ Perioden, deren jede eine Folge von positiven und negativen Resten umfasst; im zweiten Falle folgt auf die letzte Periode noch eine Anzahl positiver Reste.

Bildet man die entsprechende Reihe für q:

$$n,\quad 2n,\quad \ldots,\quad (m-3)n,\quad (m-2)n,\quad \ldots,\quad \frac{q-1}{2}n \ (\text{mod.}q)$$

oder

$$n,\quad 2n,\quad \ldots,\quad -(n+r),\quad -r,\quad \ldots,$$

deren letztes Glied $\equiv -\frac{n}{2}$ oder $\equiv \frac{q-n}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so leuchtet ein, dass die Reihe für q mit derjenigen für p übereinstimmt, nur dass die letztere in jeder Periode zwei Glieder, die beiden mittleren, nämlich ein positives und ein negatives, mehr zählt. Dies gilt offenbar auch dann, wenn $q = r$ und $p = 2n+r$ ist. In diesem Falle reduciren sich die Perioden der Reihe für q auf Null oder *ein* Glied, diejenigen der Reihe für p auf zwei oder drei Glieder, die oben gefundene Beziehung zwischen beiden Reihen bleibt aber dieselbe.

Ist also die Anzahl der negativen Reste in der Reihe für p gleich a, in der Reihe für q gleich b, so hat man für ein gerades n die Beziehung $a-b = \frac{n}{2}$, für ein ungerades n die Beziehung $a-b = \frac{n-1}{2}$ oder für beide Fälle $a-b \equiv \frac{n(n-1)}{2}$ (mod.2).

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{n}{p}\right)\cdot\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{n}{p}\right):\left(\frac{n}{q}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{(p-q)(p-q-2)}{8}},$$

$$\left(\frac{2n}{p}\right)\cdot\left(\frac{2n}{q}\right) = \left(\frac{p-q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p-q}{q}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}+\frac{q^2-1}{8}-\frac{(p-q)(p-q-2)}{8}},$$

endlich

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\left[\frac{p^2-1}{8}+\frac{q^2-1}{8}-\frac{(p-q)(p-q-2)}{8}-\frac{p-1}{2}\right]}.$$

Durch eine einfache Reduction erhält man hieraus:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Zweiter Beweis.

Diesem Beweise habe ich einige Sätze über die Reste zusammengesetzter Moduln vorauszuschicken.

1) Wenn p und q zwei ungerade Primzahlen sind, so gehören von den $(p-1)(q-1)$ Resten, die prim zu pq sind, je vier, nämlich zwei positive und zwei negative derart zusammen, dass ihre Quadrate gleich oder congruent nach dem Modul pq sind.

Sind nämlich $+a$ und $-a$ zwei entgegengesetzt gleiche Reste von p und $+b$ und $-b$ ebensolche von q, so werden durch die vier Congruenzen

$$\begin{aligned}
x_I &\equiv +a \text{ (mod.}p) \text{ und } \equiv +b \text{ (mod.}q),\\
x_{II} &\equiv +a \text{ (mod.}p) \text{ und } \equiv -b \text{ (mod.}q),\\
x_{III} &\equiv -a \text{ (mod.}p) \text{ und } \equiv +b \text{ (mod.}q),\\
x_{IV} &\equiv -a \text{ (mod.}p) \text{ und } \equiv -b \text{ (mod.}q)
\end{aligned}$$

vier verschiedene Reste x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV} bestimmt, deren Quadrate sämmtlich $\equiv a^2$ (mod.p) und $\equiv b^2$ (mod.q) und demgemäss auch demselben Quadrat nach dem Modul pq congruent sind. Dabei ist $x_I = -x_{IV}$ und $x_{II} = -x_{III}$. Wir nennen die vier Reste x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV} *conjugirt*. Indem man nach einander für a die Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$, für b die Zahlen von 1 bis $\frac{q-1}{2}$ einsetzt, erhält man sämmtliche $(p-1)(q-1)$ Reste von pq. Die Anzahl der quadratischen Reste von pq, die unter diesen $(p-1)(q-1)$ Resten sich befinden, ist gleich $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$. Denjenigen positiven Rest von pq, der dem Rest 1 conjugirt ist, bezeichnen wir ein für allemal mit α; derselbe ist nach der einen der beiden Primzahlen $\equiv +1$, nach der anderen $\equiv -1$.

2) Wenn die beiden Zahlen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ ungerade sind, so ist von je vier conjugirten Resten einer ein quadratischer nach dem Modul pq, die drei anderen sind nicht quadratisch. Ist von den beiden Zahlen $\frac{p-1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$ die eine gerade, die andere ungerade, so sind von je vier conjugirten Resten entweder zwei quadratisch oder gar keiner. Sind $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ beide gerade, so sind vier conjugirte Reste entweder alle zugleich quadratisch oder gar keiner.

Es sei wieder a eine der Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$, b eine der Zahlen von 1 bis $\frac{q-1}{2}$, ferner seien ε und ε' gleich ± 1. Sind nun $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ beide ungerade, so ist von den beiden Zahlen $+a$ und $-a$ die eine, εa quadratischer Rest von p, die andere $-\varepsilon a$ nicht; ebenso ist von den Zahlen $+b$ und $-b$ die eine $\varepsilon' b$ quadratischer Rest von q, die andere $-\varepsilon' b$ nicht. Macht man nun $x_I \equiv \varepsilon a$ (mod.p) und $\equiv \varepsilon' b$ (mod.q) so ist x_I quadratischer Rest von pq, die conjugirten Reste sind aber sämmtlich nicht quadratisch. Ist eine der beiden Zahlen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$, beispielsweise die erstere, gerade, so sind $+a$ und $-a$ beide zugleich entweder quadratische Reste

von p oder nicht. Ist sodann wieder $\varepsilon' b$ quadratischer Rest von q, und macht man $x_I \equiv +a \pmod{p}$ und $\equiv \varepsilon' b \pmod{q}$ und $x_{II} \equiv -a \pmod{p}$ und $\equiv \varepsilon' b \pmod{q}$, so sind im ersten Falle x_I und x_{II} quadratische Reste von pq, dagegen x_{III} und x_{IV} nicht; im zweiten Falle, wenn $+a$ und also auch $-a$ nicht quadratische Reste von p sind, können auch die Reste x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV} nicht quadratische Reste von pq sein. Sind endlich $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ beide gerade, und es ist $+a$ also auch $-a$ quadratischer Rest von p, $+b$ also auch $-b$ quadratischer Rest von q, so sind offenbar alle vier conjugirten Reste, die $\equiv \pm a \pmod{p}$ und $\equiv \pm b \pmod{q}$, quadratische Reste von pq, in allen anderen Fällen nicht.

3) Bezeichnet man mit P_{pq} das Product sämmtlicher positiven Reste, die prim zu pq sind, so ist, wenn $\frac{p-1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$ beide gerade sind, $P_{pq} \equiv \pm 1 \pmod{pq}$ in allen anderen Fällen ist $P_{pq} \equiv \pm \alpha \pmod{pq}$ nämlich $\equiv \pm 1 \pmod{p}$ und $\equiv \mp 1 \pmod{q}$. Da im ersten Falle $P_{pq} (\text{mod.} p) = P_{pq} (\text{mod.} q)$, in den anderen Fällen $P_{pq} (\text{mod.} p) = -P_{pq} (\text{mod.} q)$, so kann man diesen Satz auch wie folgt aussprechen:

$$(P_{pq} (\text{mod.} p)).(P_{pq} (\text{mod.} q)) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{2} \cdot \frac{q+1}{2} - 1\right]}.$$

Sind nämlich $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ beide gerade, so sind $+1$ und -1 beide quadratische Reste von pq. Man hat also vier Reste von pq, deren Quadrat $\equiv -1 \pmod{pq}$, von diesen sind zwei positiv; ist einer derselben gleich β, so ist der andere gleich $\pm \alpha\beta$, wobei $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{pq}$. Man hat somit vier positive Reste 1, α, β, $\pm \alpha\beta$, deren Product $\equiv \pm 1 \pmod{pq}$. Von den übrigen positiven Resten von pq gehört offenbar zu jedem, a, ein von ihm verschiedener, b, derart, dass $ab \equiv \pm 1 \pmod{pq}$; das ganze Product P_{pq} ist also $\equiv \pm 1 \pmod{pq}$. Ist dagegen wenigstens eine der Zahlen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ ungerade, so ist -1 kein quadratischer Rest von pq, und in diesem Falle lassen sich, von den beiden Resten 1 und α abgesehen, alle übrigen positiven Reste derart zu zweien gruppiren, dass $ab \equiv \pm 1$, $a'b' \equiv \pm 1$ u. s. w. nach dem Modul pq. In diesem Falle ist also das Product $P_{pq} \equiv \pm \alpha \pmod{pq}$.

Um das Vorzeichen von $P_{pq} (\text{mod.} p)$ und $P_{pq} (\text{mod.} q)$ zu bestimmen, verfahren wir wie folgt:

Wenn wir für den Modul p das Product bilden

$$1.2.3\ldots(p-1).(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)(2p+1)\ldots\left(p\cdot\frac{q-1}{2}-1\right),$$

so ist der Werth desselben $\equiv(-1)^{\frac{q-1}{2}}$ (mod. p).

Vergleicht man dieses Product mit P_{pq}, so bemerkt man zunächst, dass beide Producte dieselbe Anzahl von Gliedern haben, nämlich $(p-1)\frac{q-1}{2}$; das erstere kann man aber aus P_{pq} ableiten, indem man dieses mit den Factoren $q.2q.3q\cdots\frac{p-1}{2}\cdot q$ multiplicirt und durch die Factoren

$$\left(p\cdot\frac{q-1}{2}+1\right)\cdot\left(p\cdot\frac{q-1}{2}+2\right)\cdots\left(p\cdot\frac{q-1}{2}+\frac{p-1}{2}\right)$$

dividirt.

Auf den Modul p zurückgeführt ergiebt sich demnach folgende Gleichung:

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} \equiv P_{pq}\cdot\frac{q.2q\cdots\frac{p-1}{2}\cdot q}{1.2\cdots\frac{p-1}{2}} \quad (\text{mod.}\, p)$$

oder

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} \equiv P_{pq}\left(\text{mod.}\, p\cdot\left(\frac{q}{p}\right)\right)$$

oder

$$\text{(I.)} \qquad P_{pq}(\text{mod.}\, p) = \left(\frac{q}{p}\right)\cdot(-1)^{\frac{q-1}{2}}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\text{(II.)} \qquad P_{pq}(\text{mod.}\, q) = \left(\frac{p}{q}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Der *Beweis des Reciprocitätssatzes* ergiebt sich aber aus diesen beiden Gleichungen (I.) und (II.) unmittelbar. Durch Multiplication erhält man nämlich

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}+\frac{q-1}{2}} = (P_{pq}(\text{mod.}\, p)).(P_{pq}(\text{mod.}\, q))$$
$$= (-1)^{\frac{p+1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}-1}$$

und hieraus

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Dritter Beweis.

Wenn eine Zahl a quadratischer Rest oder Nichtrest der ungeraden Primzahl p ist, so ist sie es bekanntlich auch für jede Potenz von p, also

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p^n}\right).$$

Bildet man nun für die Zahlen, die prim zu p^n sind, von 1 bis $\frac{p^n-1}{2}$ die Reihe der Reste

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\quad \ldots,\quad (p-1)a,\quad (p+1)a,\quad \ldots,\quad \frac{p^n-1}{2}a \pmod{p^n},$$

so lässt sich mit einer Erweiterung des *Gauss*schen Lemmas, deren Zulässigkeit von selbst einleuchtet, sagen, dass a quadratischer Rest oder Nichtrest von p^n ist, je nachdem die Anzahl der negativen Reste in dieser Reihe eine gerade oder ungerade ist. Wir bezeichnen diese Anzahl durch $\psi\left(\frac{a}{p^n}\right)$ und erhalten somit

$$\psi\left(\frac{a}{p}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p^2}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p^3}\right) \quad \text{u. s. w.} \quad \equiv \psi\left(\frac{a}{p^n}\right) \pmod{2}.$$

Wir bezeichnen ferner durch $\Psi\left(\frac{a}{p^n}\right)$ die Anzahl der negativen Reste, die in der Reihe enthalten sind:

$$a,\quad 2a,\quad \ldots,\quad (p-1)a,\quad pa,\quad (p+1)a,\quad \ldots,\quad \frac{p^n-1}{2} \pmod{p^n},$$

in welcher die durch p theilbaren Glieder nicht ausgeschlossen sind. Heben wir aus dieser Reihe wieder die durch p theilbaren Glieder heraus

$$pa,\quad 2pa,\quad \ldots,\quad \frac{p^n-p}{2}a \pmod{p^n},$$

so ist die Zahl der negativen Reste in dieser letzteren Reihe offenbar dieselbe wie in der Reihe

$$a,\quad 2a,\quad \ldots,\quad (p-1)a,\quad pa,\quad (p+1)a,\quad \ldots,\quad \frac{p^{n-1}-1}{2}a \pmod{p^{n-1}}.$$

Man hat also $\Psi\left(\frac{a}{p^n}\right) = \psi\left(\frac{a}{p^n}\right) + \Psi\left(\frac{a}{p^{n-1}}\right)$ und hieraus

$$\Psi\left(\frac{a}{p^n}\right) = \psi\left(\frac{a}{p^n}\right) + \psi\left(\frac{a}{p^{n-1}}\right) + \psi\left(\frac{a}{p^{n-2}}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{a}{p^2}\right) + \psi\left(\frac{a}{p}\right).$$

Bezeichnen wir überhaupt, wenn P eine beliebige ungerade Zahl und a prim zu P ist, mit $\Psi\left(\frac{a}{P}\right)$ die Anzahl der negativen Reste in der Reihe

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\quad \ldots,\quad \frac{P-1}{2}\,a\ (\text{mod.}\,P),$$

in welcher a mit allen Zahlen von 1 bis $\frac{P-1}{2}$ multiplicirt erscheint, und mit $\psi\left(\frac{a}{P}\right)$ die Anzahl der negativen Reste der Reihe $a, 2a, \ldots, \frac{P-1}{2}a$ (mod. P), in welcher a nur mit den Zahlen, die prim zu P sind, multiplicirt wird, so erhalten wir auf dieselbe Weise wie oben, wenn $p, p', p'', \ldots$ ungerade Primzahlen sind,

$$\Psi\left(\frac{a}{pp'}\right) = \psi\left(\frac{a}{pp'}\right)+\psi\left(\frac{a}{p}\right)+\psi\left(\frac{a}{p'}\right),$$

$$\Psi\left(\frac{a}{pp'p''}\right)=\psi\left(\frac{a}{pp'p''}\right)+\psi\left(\frac{a}{pp'}\right)+\psi\left(\frac{a}{pp''}\right)+\psi\left(\frac{a}{p'p''}\right)+\psi\left(\frac{a}{p}\right)+\psi\left(\frac{a}{p'}\right)+\psi\left(\frac{a}{p''}\right)$$

u. s. w.

Nun ist aber $\psi\left(\frac{a}{pp'}\right)$ jedenfalls gerade, da $a^{\frac{1}{2}(p-1)(p'-1)} \equiv 1$ (mod. p) und $\equiv 1$ (mod. p') also $\equiv 1$ (mod. pp'), und wenn man die positiven Reste, die prim zu pp', je mit a multiplicirt und die Producte durch die zugehörigen Reste ersetzt, der Quotient der neuen Restreihe und der anfänglichen gleich Eins sein muss. Man hat also

$$\Psi\left(\frac{a}{pp'}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p}\right)+\psi\left(\frac{a}{p'}\right)\ (\text{mod.}\,2),$$

ebenso

$$\Psi\left(\frac{a}{pp'p''}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p}\right)+\psi\left(\frac{a}{p'}\right)+\psi\left(\frac{a}{p''}\right)\ (\text{mod.}\,2)\ \text{u. s. w.}$$

Nun seien p und q zwei ungerade Primzahlen, von welchen wenigstens eine, beispielsweise p, $\equiv 3$ (mod. 4) ist. Es sei ferner $\left(\frac{q}{p}\right) = \varepsilon = \pm 1$, also $q^{\frac{p-1}{2}} = \varepsilon + 2mp$ gesetzt. Ist q ebenfalls $\equiv 3$ (mod. 4), so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 3$ (mod. 4); ist $q \equiv 1$ (mod. 4), so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod. 4). Ist also $\varepsilon = +1$, so ist für $q \equiv 3$ (mod. 4) m ungerade und für $q \equiv 1$ (mod. 4) m gerade; ist dagegen $\varepsilon = -1$, so ist gerade das Umgekehrte der Fall. Man kann alle Möglich-

keiten zusammenfassen in der Gleichung

$$\text{(I.)}\qquad \left(\frac{q}{p}\right)\cdot(-1)^m = \varepsilon.(-1)^m = (-1)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{1}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Wenn $\varepsilon = +1$, also $p^{\frac{q-1}{2}} = 1+2mp$, so bilden wir, um $\Psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right)$ zu bestimmen, die Reihe der Reste

$$p,\ 2p,\ \ldots,\ mp,\ (m+1)p,\ \ldots,\ 2mp,\ p-1,\ \ldots,$$
$$2mp-1,\ p-2,\ \ldots,\ (\text{mod.}(2mp+1)),$$

deren letztes Glied $= mp.p = (2mp+1)\frac{p-1}{2}+mp-\frac{p-1}{2}$ ist.

Diese Reihe besteht offenbar aus $\frac{p-1}{2}$ Perioden von Resten, deren jede m positive und m negative umfasst und zu welchen noch m positive Schlussglieder kommen. Es ist also

$$\Psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right) = m\frac{p-1}{2}.$$

Wenn $\varepsilon = -1$, also $q^{\frac{p-1}{2}} = -1+2mp$, so erhält man die Reihe

$$p,\ 2p,\ \ldots,\ (m-1)p,\ mp,\ \ldots,\ (2m-1)p,\ 1,\ p+1,\ \ldots,$$
$$(m-1)p+1,\ mp+1,\ \ldots,\ (2m-1)p+1,\ 2,\ p+2,\ \ldots,$$

deren letztes Glied $= (mp-1)p = (2mp-1)\frac{p-1}{2}+mp-\frac{p+1}{2}$.

Auch diese Reihe umfasst $\frac{p-1}{2}$ Perioden von Resten, deren erste $m-1$ positive, m negative, die anderen alle je m positive und m negative Reste zählen, während auf die letzte Periode noch m positive Reste folgen. Auch in diesem Falle ist somit

$$\Psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right) = m\frac{p-1}{2}.$$

Nun ist

$$\Psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right) = \psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right)+\psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-3}{2}}}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{p}{q^2}\right)+\psi\left(\frac{p}{q}\right),$$

wobei

$$\psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right) \equiv \psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-3}{2}}}\right) \equiv \cdots \equiv \psi\left(\frac{p}{q^2}\right) \equiv \psi\left(\frac{p}{q}\right)\ (\text{mod.}2).$$

Da $\frac{p-1}{2}$ der Voraussetzung gemäss ungerade ist, so ist

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) \equiv \Psi\left(\frac{p}{q^{\frac{p-1}{2}}}\right) \pmod{2} \equiv m \pmod{2},$$

folglich

$$\text{(II.)} \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^m.$$

Dies mit der Gleichung (II.) multiplicirt, giebt:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Sind beide Primzahlen p und $q \equiv 1 \pmod{4}$, so giebt es nach dem von *Lejeune Dirichlet* bewiesenen Satze immer eine Primzahl $q' \equiv 3 \pmod{4}$ von der Beschaffenheit, dass $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ oder $qq' = 1+2mp$.

Wir bestimmen hieraus, ganz wie oben, $\Psi\left(\frac{p}{qq'}\right) = m\frac{p-1}{2}$, woraus sogleich folgt:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{p}{q'}\right) \equiv m\frac{p-1}{2} \pmod{2} \equiv 0 \pmod{2}$$

oder

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q'}\right).$$

Aber nach dem ersten Theil unseres Beweises hat man $\left(\frac{p}{q'}\right) = \frac{q'}{p}$ und aus $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ folgt $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right)$. Man hat somit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q'}\right) = \left(\frac{q'}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

Anmerkung 1. Für den Fall, dass beide Primzahlen $\equiv 5 \pmod{8}$ sind, lässt sich der Satz ohne eine Hülfsprimzahl ganz auf dem im ersten Theil dieses Beweises eingeschlagenen Wege beweisen. Denn wäre in diesem Falle $\left(\frac{p}{q}\right)$ nicht $= \left(\frac{q}{p}\right)$, so wäre einer dieser beiden Werthe, etwa $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$ oder $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv +1 \pmod{q}$, folglich $p^{\frac{q-1}{4}} \equiv \pm 1 \pmod{q}$. Nunmehr findet man wieder $\Psi\left(\frac{q}{p^{\frac{q-1}{4}}}\right) \equiv 0 \pmod{2}$, und da $\frac{q-1}{4}$ ungerade ist, auch $\psi\left(\frac{q}{p}\right) \equiv 0 \pmod{2}$ oder $\left(\frac{q}{p}\right) = 1 = \left(\frac{p}{q}\right)$.

Anmerkung 2. Aus den Sätzen, die ich diesem dritten Beweise vorausgeschickt habe, liesse sich leicht auch ein Beweis des verallgemeinerten Reciprocitätssatzes ableiten. Doch begnüge ich mich, darauf hingewiesen zu haben.

Zusatz.

Unter Beibehaltung der Grundidee, von welcher ich bei diesem directen Beweise ausgehe, lässt sich derselbe auch ohne Zuziehung der Untersuchungen von *Lejeune Dirichlet* ganz durchführen, wenn wir uns der sogenannten vollständigen Induction bedienen.

Ich schicke dabei folgendes Lemma voraus: Es sei P eine positive, ungerade, im übrigen beliebig zusammengesetzte Zahl und a prim zu P, es werden ferner wie oben die Reste nach dem Modul P zwischen $-\frac{P}{2}$ und $+\frac{P}{2}$ genommen und durch $\Psi\left(\frac{a}{P}\right)$ die Menge der negativen Reste bezeichnet, die sich in der Reihe

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad \frac{P-1}{2}a \ (\text{mod.} P)$$

vorfinden, wobei a der Reihe nach mit allen Zahlen von 1 bis $\frac{P-1}{2}$ multiplicirt ist, ferner durch $\psi\left(\frac{a}{P}\right)$ die Menge der negativen Reste, die von jener Reihe noch übrig bleiben, wenn daraus alle Glieder, die nicht prim zu P sind, ausgeschieden werden: Alsdann ist $\Psi\left(\frac{a}{P}\right) = \Sigma\psi\left(\frac{a}{n}\right)$, wobei sich das Summenzeichen auf n bezieht, für welches der Reihe nach alle Divisoren der Zahl P zu setzen sind, ausgeschlossen 1 aber eingeschlossen die Zahl P selbst; ferner ist $\Psi\left(\frac{a}{P}\right) \equiv \Sigma\psi\left(\frac{a}{p}\right)(\text{mod.} 2)$, wobei sich das Summenzeichen auf p bezieht, für welches der Reihe nach alle Primfactoren von P zu setzen sind, und zwar jeder einzelne so oft, als er in dem Product P vorkommt.

Beweis. Wenn $\delta_{1}, \delta_{11}, \delta_{111}, \ldots, \delta_{\nu}$ die sämmtlichen Factoren von P sind, ausgeschlossen P selbst, aber eingeschlossen die Einheit, wenn ferner $P = \delta_{1} n_{1} = \delta_{11} n_{11} = \cdots = \delta_{\nu} n_{\nu}$ gesetzt wird, so stellen $n_{1}, n_{11}, \ldots, n_{\nu}$ ebenfalls sämmtliche Factoren von P dar, ausgeschlossen jedoch 1, aber eingeschlossen P selbst. Nun lassen sich bekanntlich die sämmtlichen Zahlen von 1 bis

$P-1$ in ν Gruppen theilen, je nachdem sie δ_1 oder $\delta_{11}, \ldots, \delta_\nu$ als grössten gemeinschaftlichen Divisor mit P haben; dabei ist die Menge der Zahlen, welche in die Gruppe m (mit dem grössten gemeinschaftlichen Divisor δ_m) gehören, gleich $\varphi(n_m)$, wobei φ die bekannte Bedeutung hat; ebenso lassen sich die Zahlen von 1 bis $\frac{P-1}{2}$ in ν Gruppen theilen, wobei in die Gruppe m $\frac{1}{2}\varphi(n_m)$ Zahlen gehören.

Wenn man jetzt aus der oben aufgestellten vollständigen Reihe der Reste

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad \frac{P-1}{2}\,a \pmod{P}$$

diejenigen der Gruppe m heraushebt:

$$a\delta_m, \quad 2a\delta_m, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}\Big(\frac{P}{\delta_m}-1\Big)a\delta_m \pmod{P},$$

so befinden sich darunter offenbar eben so viele positive und negative Reste wie in der Reihe

$$a, \quad 2a, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}\Big(\frac{P}{\delta_m}-1\Big)a \quad \Big(\text{mod.}\,\frac{P}{\delta_m}\Big) \quad \text{oder} \quad (\text{mod.}\,n_m),$$

wobei a nur mit denjenigen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}\Big(\frac{P}{\delta_m}-1\Big)$ multiplicirt ist, die prim zu n_m sind. Die Anzahl der negativen Reste in dieser Reihe ist aber $=\psi\Big(\frac{a}{n_m}\Big)$. Der erste Theil unseres Satzes ergiebt sich hieraus ohne Weiteres:

$$\Psi\Big(\frac{a}{P}\Big) = \Sigma\psi\Big(\frac{a}{n}\Big),$$

wobei für n der Reihe nach alle Factoren von P zu setzen sind, ausgeschlossen 1, aber eingeschlossen P selbst.

Wenn nun einer dieser Factoren n zwei oder mehrere verschiedene Primfactoren $p_1, p_{11}, \ldots$ hat, wenn also $n = p_1^\alpha . p_{11}^\beta \ldots$ ist, so ist bekanntlich

$$\varphi(n) = (p_1-1)p_1^{\alpha-1}.(p_{11}-1)p_{11}^{\beta-1}\ldots;$$

$\frac{1}{2}\varphi(n)$ ist daher theilbar sowohl durch $(p_1-1)p_1^{\alpha-1}$ als durch $(p_{11}-1)p_{11}^{\beta-1}$ u. s. w., d. h. sowohl durch $\varphi(p_1^\alpha)$ als durch $\varphi(p_{11}^\beta)$ u. s. w, es ist also auch, wenn a, wie vorausgesetzt, prim zu P und daher auch zu n ist,

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\,p_1^\alpha) \equiv 1 \quad (\text{mod.}\,p_{11}^\beta) \equiv \cdots,$$

mithin $a^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Da aber

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(n)} = \frac{a.2a \cdots \frac{n-1}{2}a}{1.2 \cdots \frac{n-1}{2}},$$

wobei in der Reihe 1, 2, ... nur die Zahlen zu nehmen sind, welche prim zu n sind, so muss in der Reihe $a, 2a, \ldots, \frac{n-1}{2}a$ die Zahl der negativen Reste (mod. n) nothwendig eine gerade sein, es ist also in diesem Falle $\Psi\left(\frac{a}{n}\right) \equiv 0$ (mod. 2).

Scheidet man daher aus der Gleichung

$$\Psi\left(\frac{a}{P}\right) = \Sigma\psi\left(\frac{a}{n}\right)$$

auf der rechten Seite alle diejenigen Glieder aus, bei welchen n aus zwei oder mehreren verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt ist, und zieht man in Betracht, dass, wie oben schon dargethan wurde,

$$\psi\left(\frac{a}{p}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p^2}\right) \equiv \psi\left(\frac{a}{p^3}\right) \cdots \text{ (mod. 2)},$$

so erhält man auch den zweiten Theil unseres Satzes, nämlich

$$\Psi\left(\frac{a}{P}\right) \equiv \Sigma\psi\left(\frac{a}{p}\right) \text{ (mod. 2)},$$

wobei für p die sämmtlichen Primfactoren von P zu setzen sind, und zwar jeder so oft, als er in dem Product P vorkommt.

Diese letztere Gleichung entspricht insofern der von *Jacobi* eingeführten Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symbols als $\Psi\left(\frac{a}{P}\right)$ gerade oder ungerade wird, je nachdem der Werth des Symbols $\left(\frac{a}{P}\right) = +1$ oder $= -1$ ist.

Noch mag bemerkt werden, dass wenn P und Q prim zu einander sind und a prim zu P und Q, auch

$$\Psi\left(\frac{a}{PQ}\right) \equiv \Psi\left(\frac{a}{P}\right) + \Psi\left(\frac{a}{Q}\right) \text{ (mod. 2)}.$$

Und nunmehr gehen wir zum *Beweis des Reciprocitätssatzes* über.

Wir nehmen an, derselbe sei bewiesen für jede Combination von je zwei Primzahlen p und p_1, die kleiner sind als die Primzahl q, und werden

nun zeigen, dass derselbe auch gilt für jede Combination von q mit einer der Primzahlen p.

Wir bemerken zuvor, dass nach unserer Voraussetzung auch der verallgemeinerte Reciprocitätssatz $\left(\frac{P}{Q}\right)\cdot\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}$ gilt, wenn P und Q nur aus Primzahlen zusammengesetzt sind, die kleiner als q sind.

Nach der im Vorstehenden eingeführten Bezeichnung lässt sich der einfache Reciprocitätssatz in folgender Congruenz aussprechen:

$$\psi\left(\frac{p}{p'}\right)+\psi\left(\frac{p_1}{p}\right) \equiv \frac{p-1}{2}\cdot\frac{p_1-1}{2} \pmod{2},$$

und der verallgemeinerte wie folgt:

$$\Psi\left(\frac{P}{Q}\right)+\Psi\left(\frac{Q}{P}\right) \equiv \frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2} \pmod{2}.$$

Nun lässt sich immer die Gleichung

$$q\varphi = pn+\varepsilon, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon = \pm 1,$$

derart auflösen, dass φ ungerade und $< p$ ist; dann ist n gerade.

Für $\varepsilon = +1$ ist nun $q\varphi$ quadratischer Rest von p und daher $\psi\left(\frac{q}{p}\right)+\psi\left(\frac{\varphi}{p}\right)\equiv 0 \pmod{2}$.

Für $\varepsilon = -1$ ist, wenn $p\equiv 1 \pmod{4}$, ebenfalls $q\varphi$ quadratischer Rest von p, dagegen nicht, wenn $p\equiv 3 \pmod{4}$; für beide Fälle hat man

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{\varphi}{p}\right) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{2}.$$

Alle Fälle (für $\varepsilon = +1$ oder $= -1$) lassen sich zusammenfassen in die Congruenz

$$\text{(I.)} \qquad \psi\left(\frac{q}{p}\right)+\psi\left(\frac{\varphi}{p}\right) \equiv \frac{1-\varepsilon}{2}\cdot\frac{p-1}{2} \pmod{2}.$$

Da ferner $\varphi < p$, also auch $< q$ ist, so gilt für p und φ der verallgemeinerte Reciprocitätssatz; es ist also

$$\text{(II.)} \qquad \psi\left(\frac{\varphi}{p}\right)+\Psi\left(\frac{p}{\varphi}\right) \equiv \frac{\varphi-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2} \pmod{2},$$

endlich ist

$$\Psi\left(\frac{p}{q\varphi}\right) \equiv \psi\left(\frac{p}{q}\right)+\Psi\left(\frac{p}{\varphi}\right) \pmod{2},$$

aber $\Psi\left(\frac{p}{q\varphi}\right)=\Psi\left(\frac{p}{pn+\varepsilon}\right)$ ist gleich der Anzahl der negativen Reste, die

in der Reihe

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad \frac{pn+\varepsilon-1}{2}\,a \pmod{(pn+\varepsilon)}$$

enthalten sind. Diese Anzahl lässt sich aber wie oben (im dritten Beweise) bestimmen, sie ist $= \frac{n}{2} \cdot \frac{p-1}{2}$. Man hat daher

$$\text{(III.)} \qquad \psi\left(\frac{p}{q}\right) + \Psi\left(\frac{p}{\varphi}\right) \equiv \frac{n}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{2}.$$

Unter Berücksichtigung dessen, dass $a+b \equiv a-b \pmod{2}$ und für ein ungerades a $ab \equiv b \pmod{2}$ erhält man aus (I.) und (II.), indem man links (I.) von (II.) subtrahirt, rechts addirt:

$$\text{(IV.)} \qquad \Psi\left(\frac{p}{\varphi}\right) - \psi\left(\frac{q}{p}\right) \equiv \frac{\varphi-\varepsilon}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{2},$$

und indem man (IV.) von (III.) subtrahirt, nachdem man auf der rechten Seite bei (III.) mit p, bei (IV.) mit q multiplicirt hat,

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \psi\left(\frac{q}{p}\right) \equiv \frac{pn-q\varphi+\varepsilon q}{2} \cdot \frac{p-1}{2}$$

$$\equiv \frac{\varepsilon q-\varepsilon}{2} \cdot \frac{p-1}{2}$$

$$\equiv \frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{2}.$$

Der Satz gilt also auch für p und q, und da er für die Primzahlen 3 und 5 gilt, so hat er auch allgemeine Gültigkeit.

Ueber die Reductibilität linearer homogener Differentialgleichungen.

(Von Herrn *M. Hamburger*.)

In der Arbeit „Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen" im 76. Bande dieses Journals*) hat Herr *Frobenius* folgenden merkwürdigen Satz aufgestellt:

„Wenn von zwei verschiedenen Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten das eine ein homogener linearer Differentialausdruck mit eindeutigen Coefficienten von dem anderen ist, so ist die Differentialgleichung reductibel."

Nach der von Herrn *Frobenius* festgesetzten Definition heisst eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten reductibel, wenn es eine lineare Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit ebenfalls eindeutigen Coefficienten giebt, mit der die erstere ein Integral gemein hat.

Von dem angeführten Satze, der durch seine Anwendung in den neueren Untersuchungen des Herrn *Fuchs***) besondere Bedeutung erlangt hat, hat Herr *Frobenius* a. a. O. einen indirecten Beweis gegeben. Im Folgenden soll der Satz auf directem Wege abgeleitet werden, wodurch zugleich Aufschluss gewonnen wird über die Natur der Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung, mit denen die gegebene Differentialgleichung Integrale gemeinsam hat.

Sei $P(y) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung in y mit eindeutigen Coefficienten in x. Zwischen zwei von einander linear unabhängigen particulären Integralen y_1 und η_1 bestehe die Beziehung

$$(1.)\qquad \eta_1 = A_0 y_1 + A_1 y_1' + \cdots + A_\nu y_1^{(\nu)},$$

---

*) S. 268.

**) S. die Abhandlungen „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen" Sitzungsberichte der Berl. Akademie 1888 u. 1889.

wo A_0, $A_1 \ldots$ ebenfalls eindeutige Functionen von x bedeuten, $y_1^{(k)} = \frac{d^k y_1}{dx^k}$ und $\nu \leqq n-1$ ist.

Die Anzahl der von einander unabhängigen Zweige der Function y_1 kann nicht grösser als n sein. Ist sie kleiner als n, dann genügt y_1, wie Herr *Frobenius**) gezeigt hat, einer linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer als der $n$ten Ordnung mit eindeutigen Coefficienten; in diesem Falle ist also die gegebene Gleichung $P(y) = 0$ gewiss reductibel.

Wir nehmen jetzt an, dass die Anzahl der unabhängigen Zweige von y_1 genau gleich n sei, und zwar seien

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

n solcher Zweige. Durch die Umläufe der unabhängigen Variablen x, welche diese Zweige hervorbringen, möge die Function η_1 bezüglich in die Zweige

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n$$

übergehen. Bei diesen Umläufen von x geht die Gleichung (1.) mit Rücksicht darauf, dass die Coefficienten A_1, A_2, ... ungeändert bleiben, in das System von Gleichungen

$$\text{(2.)} \qquad \eta_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \cdots + A_\nu y_k^{(\nu)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

über.

Es kann nun der Fall eintreten, dass die Functionen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ nicht unabhängig von einander sind, zwischen ihnen also eine Gleichung

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_n \eta_n = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht. Setzt man**)

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = u,$$

so erhält man in diesem Falle aus (2.) durch Multiplication mit c_k und Summation über k:

$$A_0 u + A_1 u' + \cdots + A_\nu u^{(\nu)} = 0.$$

Da somit das Integral u der Gleichung $P(y) = 0$ eine Differentialgleichung niedrigerer als $n$ter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten befriedigt, so ist im betrachteten Falle die gegebene Gleichung reductibel.

Sind aber die n Zweige $\eta_1, \ldots, \eta_n$ linear unabhängig von einander,

---

*) a. a. O. S. 243.

**) Vergl. *Fuchs*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888 S. 1275.

so besteht, da die Integrale $y_1, \ldots, y_n$ nach unserer Voraussetzung ein Fundamentalsystem bilden, jedenfalls das System linearer Gleichungen mit constanten Coefficienten:

$$\eta_k = a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \cdots + a_{kn}y_n, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

woraus mit Einführung einer neuen Constanten ω folgt:

$$(3.) \qquad \eta_k - \omega y_k = a_{k1}y_1 + \cdots + (a_{kk} - \omega)y_k + \cdots + a_{kn}y_n. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Bestimmt man nun ω als Wurzel der Gleichung

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man n constante Grössen $c_1, \ldots c_n$, so wählen, dass die Beziehung

$$c_1(\eta_1 - \omega y_1) + \cdots + c_n(\eta_n - \omega y_n) = 0$$

besteht. Die Grössen c genügen dem Gleichungssystem

$$c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{n1} = c_1\omega; \quad \ldots; \quad c_1 a_{1n} + \cdots + c_n a_{nn} = c_n\omega.$$

Setzt man daher

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = u,$$

so wird

$$c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n = \omega u,$$

und man erhält aus (2.) durch Multiplication mit c_k und Summation über k von 1 bis n:

$$\omega u = A_0 u + A_1 u' + \cdots + A_\nu u^{(\nu)},$$

also eine lineare Differentialgleichung νter Ordnung ($\nu < n$) mit eindeutigen Coefficienten, mit der die Gleichung $P(y) = 0$ ein Integral gemeinsam hat. Die Reductibilität der gegebenen Differentialgleichung unter der Voraussetzung, dass zwischen zwei Integralen derselben eine Relation von der Form (1.) besteht, ist hiermit in allen Fällen erwiesen. Wie man sieht, tritt der vorige Fall in den zuletzt betrachteten ein, wenn die Gleichung $\varDelta = 0$ eine Wurzel $\omega = 0$ hat.

Die Eigenschaft der gegebenen Gleichung $P(y) = 0$, mit der Gleichung

$$\omega y = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)}$$

ein Integral gemein zu haben, ergab sich als eine Folge der Voraussetzung, dass das in der Relation (1.) auftretende Integral y_1 n von einander linear unabhängige Zweige besitzt. Ein Blick auf den Gang der vorangehenden Entwickelung zeigt indess, dass es für die gedachte Eigenschaft schon hin-

reichend ist, wenn eine Relation von der Form (1.) mit denselben Coefficienten A für n von einander linear unabhängige Integrale y_1 stattfindet, auch ohne dass diese Integrale verschiedene Zweige einer einzigen Function sind.

Die constante Grösse ω, die von den linearen Relationen abhängt, welche die verschiedenen Functionen $y_1, \dots, y_n$ mit den entsprechenden Functionen $\eta_1, \dots, \eta_n$ verknüpfen, hat sich als eine Wurzel der transcendenten Gleichung $\Delta = 0$ ergeben. Man kann für sie aber auch eine algebraische Gleichung erhalten, indem man die Bedingung des simultanen Bestehens der Differentialgleichungen

$$P(y) = 0 \quad \text{und} \quad f(y) \equiv (A_0 - \omega)y + A_1 y' + \dots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

aufsucht*).

Da nämlich die Gleichung $f(y) = 0$ durch $u = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ befriedigt werden muss, so besteht die Gleichung

$$f(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) \equiv c_1 f(y_1) + \dots + c_n f(y_n) = 0,$$

woraus nach einem bekannten Satze folgt, dass die Determinante

$$\left| \frac{d^k f(y_i)}{dx^k} \right| = |f^{(k)}(y_i)| \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, n-1 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

verschwinden muss. Indem man mit Hülfe der Gleichung $P(y) = 0$ die Ableitungen $n$ter und höherer Ordnung von y durch diejenigen niedrigerer Ordnung ersetzt, erhält $f^{(k)}(y)$ die Form

$$f^{(k)}(y) = B_0^k y + B_1^k y' + \dots + B_{n-1}^k y^{(n-1)},$$

so dass

$$B_0^0 y + B_1^0 y' + \dots + B_{n-1}^0 y^{(n-1)}$$

mit

$$(A_0 - \omega) y + A_1 y' + \dots + A_\nu y^{(\nu)}$$

identisch ist. Die Grösse ω kommt, wie leicht ersichtlich, nur in B_k^k unter den Coefficienten B vor, und zwar linear in der Form $M_k - \omega$, wo M_k eine Function von x ist. Nun ist

$$(4.) \qquad |f^{(k)}(y_i)| = |B_l^k| \cdot |y_i^{(k)}|. \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, n-1 \\ l = 0, 1, \dots, n-1 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

Da $|y_i^{(k)}|$ von Null verschieden ist, so muss

$$|B_l^k| = 0$$

sein.

---

*) Vgl. *Escherich*, „Ueber die Gemeinsamkeit particulärer Integrale“ Denkschriften der Wiener Akademie Bd. 46 S. 61 ff.

Herr ***Escherich*** hat a. a. O. die wichtige Bemerkung gemacht, dass diese Gleichung auch die hinreichende Bedingung für die Existenz gemeinsamer Integrale von $f(y)=0$ und $P(y)=0$ ist. Denn aus $|B_i^k|=0$ folgt nach (4.) $|f^{(k)}(y_i)|=0$. Das Verschwinden dieser Determinante hat aber, wie unseres Wissens zuerst Herr *Christoffel**) gezeigt hat, zur Folge, dass zwischen den Functionen $f(y_1), \dots, f(y_n)$ eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht:

$$0 = c_1 f(y_1)+c_2 f(y_2)+\cdots+c_n f(y_n) = f(c_1 y_1+\cdots+c_n y_n),$$

ohne dass die c sämmtlich verschwinden. Also existirt jedenfalls stets ein Integral

$$u = c_1 y_1+\cdots+c_n y_n,$$

welches $P(y)=0$ mit $f(y)=0$ gemeinsam hat, wenn die Gleichung $|B_i^k|=0$ erfüllt ist. Diese Gleichung ist in ω vom $n$ten Grade, der Coefficient von ω^n ist $(-1)^n$. Damit alle ihre Wurzeln, die mit denen von $\Delta=0$ übereinstimmen müssen, constant werden, ist nothwendig, dass die Coefficienten der anderen Potenzen von ω in $|B_i^k|$ ebenfalls von x unabhängig werden.

Sind die Wurzeln $\omega_1, \dots, \omega_n$ alle von einander verschieden, so erhält man n Gleichungen

$$(5.)\qquad (A_0-\omega_k)y+A_1 y'+\cdots+A_\nu y^{(\nu)} = 0, \qquad (k=1, 2, \dots, n)$$

mit denen $P(y)=0$ Integrale gemeinsam hat. Ist ferner y_k ein Integral, welches die $k$te Gleichung (5.) mit $P(y)$ gemeinsam hat, so sind $y_1, \dots, y_n$ von einander unabhängig. Denn bestände zwischen ihnen die Relation

$$c_1 y_1+\cdots+c_n y_n = 0,$$

so erhielte man aus

$$(A_0-\omega_k)y_k+A_1 y_k'+\cdots+A_\nu y_k^{(\nu)} = 0$$

durch Multiplication mit c_k und Summirung über k von 1 bis n:

$$c_1\omega_1 y_1+c_2\omega_2 y_2+\cdots+c_n\omega_n y_n = 0,$$

und vermöge dieser Gleichung durch Multiplication der vorigen Gleichung mit $c_k\omega_k$ und Summation:

$$c_1\omega_1^2 y_1+c_2\omega_2^2 y_2+\cdots+c_n\omega_n^2 y_n = 0,$$

und nach demselben Verfahren weiter

$$c_1\omega_1^s y_1+c_2\omega_2^s y_2+\cdots+c_n\omega_n^s y_n = 0 \qquad (s=3, 4, \dots, n-1)$$

*) Dieses Journal Bd. 55 S. 293. Später hat Herr ***Frobenius*** den Satz von neuem bewiesen (dieses Journal Bd. 76 S. 238).

und da wegen der Verschiedenheit der Wurzeln $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die Determinante $|\omega_k^i|(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ nicht verschwindet, so muss

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

sein.

Daraus aber lässt sich beweisen, dass $P(y) = 0$ mit keiner der Gleichungen (5.) mehr als ein Integral gemeinsam haben kann. Denn hätte z. B. die Gleichung

$$(A_0 - \omega_1)y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

mit $P(y) = 0$ zwei von einander unabhängige Integrale y_1 und y_2 gemeinsam, und die Integrale, welche die übrigen $n-1$ Gleichungen (5.) mit $P(y) = 0$ gemein haben, wären der Reihe nach $y_3, \ldots, y_{n+1}$, so müssten diese nach dem eben bewiesenen Satze unter einander und von y_1 und y_2 verschieden sein. Dies ist aber nicht möglich, da zwischen $n+1$ Integralen von $P(y) = 0$ stets eine lineare Relation bestehen muss.

Haben aber zwei lineare homogene Differentialgleichungen nur ein Integral gemeinsam, so kann man dieses durch blosse Quadratur erhalten.

Besteht also eine Relation von der Form (1.) mit denselben Coefficienten A für n verschiedene Integrale y, was z. B. eintritt, wenn y_1 in der Relation (1.) n verschiedene Zweige hat, und sind die Wurzeln der zugehörigen Gleichung für ω alle von einander verschieden, so können sämmtliche Integrale der gegebenen Differentialgleichung $P(y) = 0$ durch blosse Quadraturen erhalten werden.

Die Gleichungen

$$(6.)\qquad f^{(k)}(y) \equiv B_0^k y + B_1^k y' + \cdots + B_{n-1}^k y^{(n-1)} = 0$$

dienen dazu, das jeder Wurzel ω von $|B_l^k| = 0$ entsprechende und, wie oben gezeigt, stets existirende Integral zu ermitteln. Denn da für eine einfache Wurzel ω die Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades von $|B_l^k|$ nicht alle zugleich verschwinden können, so sind $n-1$ der Gleichungen (6.) von einander unabhängig, und man erhält durch deren Auflösung den Quotienten $y' : y$ gleich einer eindeutigen Function von x.

Aus der obigen Betrachtung geht hervor, dass auch einer vielfachen Wurzel ω_1, falls für sie die Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades von $|B_l^k|$ nicht alle zugleich verschwinden, ein Integral zugehört, für welches $y' : y$ gleich einer eindeutigen Function von x ist, und welches wir u_1 nennen wollen. Was die anderen zu dieser Wurzel, die eine μ-fache sein möge,

gehörigen Integrale betrifft, so bemerken wir zunächst, dass in diesem Falle auch das Gleichungssystem

$$c_1 a_{11}+\cdots+c_n a_{n1} = c_1\omega_1; \quad \ldots; \quad c_1 a_{1n}+\cdots+c_n a_{nn} = c_n\omega_1$$

nur eine Lösung für die Verhältnisse der c liefert. Für diese ist

$$v_1 = c_1\eta_1+\cdots+c_n\eta_n = \omega_1(c_1 y_1+\cdots+c_n y_n) = \omega_1 u_1.$$

Führen wir in dem System

$$\eta_k = a_{k1}y_1+\cdots+a_{kn}y_n \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

jetzt u_1 für y_1 ein, so geht dasselbe in das folgende über:

$$(7.)\qquad \begin{cases} v_1 = \omega_1 u_1, \\ \eta_k = a'_{k1}u_1+a'_{k2}y_2+\cdots+a'_{kn}y_n, \end{cases} \qquad (k=2,3,\ldots,n)$$

und die Gleichung für ω, $\varDelta=0$, geht in

$$(\omega_1-\omega)\varDelta' = 0$$

über, wo

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} a'_{22}-\omega & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \ldots & a'_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$

ist, und da ω_1 eine vielfache Wurzel von $\varDelta=0$ ist, ebenfalls für $\omega=\omega_1$ verschwindet. Man kann daher $n-1$ Grössen $c'_2, \ldots c'_n$, so wählen, dass das System

$$c'_2 a_{22}+\cdots+c'_n a_{n2} = c'_2\omega_1, \quad \ldots, \quad c'_2 a_{2n}+\cdots+c'_n a_{nn} = c'_n\omega_1$$

erfüllt wird. Multiplicirt man nunmehr die zweite der Gleichungen (7.) mit c'_k und summirt über k von 2 bis n, so erhält man zwischen den Integralen

$$u_2 = c'_2 y_2+\cdots+c'_n y_n, \quad v_2 = c'_2\eta_2+\cdots+c'_n\eta_n$$

die Relation

$$v_2 = (c'_2 a'_{21}+\cdots+c'_n a'_{n1})u_1+\omega_1 u_2.$$

Da durch obiges Gleichungssystem nur die Verhältnisse der Grössen c' bestimmt sind, so kann man über die letzteren noch dahin verfügen, dass der Coefficient von u_1 in vorstehender Relation gleich 1 wird, und man erhält alsdann

$$v_2 = \omega_1 u_2+u_1.$$

Indem man jetzt u_2 statt y_2 einführt und in der angegebenen Weise weiter verfährt*), erhält man zwei neue Integrale u_3 und v_3, welche gleiche lineare

*) Ueber dieses Verfahren und das Folgende vergl. eine Note des Herrn *Jordan* in den Comptes Rendus 1871 p. 787 und meine Abhandl. in diesem Journale Bd. 76 S. 117ff.

Verbindungen bezüglich von $y_1, \ldots, y_n$ und $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sind, und zwischen denen die Relation stattfindet

$$v_3 = \omega_1 u_3 + u_2.$$

Auf diesem Wege ergiebt sich, dass einer μ-fachen Wurzel ω_1, für welche nicht zugleich alle Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades von Δ zugleich verschwinden, μ lineare homogene Verbindungen der Integrale $y_1, \ldots, y_n$:

$$c_1^\lambda y_1 + \cdots + c_n^\lambda y_n = u_\lambda$$

entsprechen, die mit den gleichen Verbindungen der zugehörigen Integrale $\eta_1, \ldots, \eta_n$:

$$c_1^\lambda \eta_1 + \cdots + c_n^\lambda \eta_n = v_\lambda$$

in folgenden Beziehungen stehen:

$$v_2 = \omega_1 u_1, \quad v_2 = \omega_1 u_2 + u_1, \quad \ldots, \quad v_\mu = \omega_1 u_\mu + u_{\mu-1}.$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (2.)

$$\eta_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \cdots + A_\nu y_k^{(\nu)}$$

mit c_k^λ und summirt über k von 1 bis n, so erhält man für $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu$ der Reihe nach

$$(8.) \quad \begin{cases} \omega_1 u_1 = A_0 u_1 + A_1 u_1' + \cdots + A_\nu u_1^{(\nu)}, \\ \omega_1 u_2 + u_1 = A_0 u_2 + A_1 u_2' + \cdots + A_\nu u_2^{(\nu)}, \\ \omega_1 u_3 + u_2 = A_0 u_3 + A_1 u_3' + \cdots + A_\nu u_3^{(\nu)}, \\ \vdots \\ \omega_1 u_\mu + u_{\mu-1} = A_0 u_\mu + A_1 u_\mu' + \cdots + A_\nu u_\mu^{(\nu)}. \end{cases}$$

Zwischen $u_1, \ldots, u_\mu$ kann keine lineare homogene Beziehung bestehen, wie man sich aus vorstehenden Gleichungen sofort überzeugt.

Die gegebene Differentialgleichung $P(y) = 0$ hat demnach zunächst ein einziges Integral u_1 mit der Gleichung

$$(9.) \quad (A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

gemeinsam, sodann ein Integral u_2 mit der linearen nicht homogenen Differentialgleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_1,$$

ferner ein Integral u_3 mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_2 \quad \text{u. s. f.},$$

zuletzt ein Integral u_μ mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_{\mu-1}.$$

Es ist noch zu bemerken, dass die Gleichung

$$(10.)\qquad (A_0-\omega_1)y+A_1y'+\cdots+A_\nu y^{(\nu)} = u_{\lambda-1}$$

nur das Integral cu_1+u_λ, wo c eine willkürliche Constante und u_λ ein bestimmtes Integral von (10.) ist, mit $P(y)=0$ gemein haben kann. Denn alle Integrale von (10.) sind in $u_\lambda+v$ enthalten, wo v das allgemeine Integral von (9.) ist. Bedeutet nun w ein zweites Integral ausser u_λ, welches $P(y)=0$ mit der Gleichung (10.) gemein hat, so ist $w-u_\lambda$ ebenfalls ein Integral von $P(y)=0$, welches gleichzeitig die Gleichung (9.) befriedigt. Diese beiden homogenen Gleichungen haben aber, wie oben gezeigt, nur ein einziges particuläres Integral u_1 gemeinsam. Mithin ist $w=u_\lambda+cu_1$.

Hieraus folgt, dass alle Integrale $u_\lambda(\lambda=1,2,\ldots,\mu)$ durch blosse Quadraturen erhalten werden können.

Um die Integrale $u_2,\ldots,u_\mu$ zu finden, gehen wir, nachdem u_1 (S. 126) ermittelt ist, von der Gleichung

$$f(y)\equiv(A_0-\omega_1)y+A_1y'+\cdots+A_\nu y^{(\nu)}=u_1$$

aus und bilden durch Differentiation nach x und Zurückführung aller Ableitungen von y auf niedrigere als $n$ter Ordnung mit Hülfe von $P(y)=0$ das Gleichungssystem

$$(11.)\qquad f^{(k)}(y)\equiv B_0^k y+B_1^k y'+\cdots+B_{n-1}^k y^{(n-1)}=u_1^{(k)}. \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

Dieses muss, obwohl die Determinante $|B_\lambda^k|=0$ ist, eine Lösung zulassen, wie aus dem Vorhergehenden feststeht. Man kann sich jedoch auch direct auf folgendem Wege davon überzeugen.

Es sei

$$(12.)\qquad (a_1^1-\omega)x_1+\cdots+a_n^1x_n=0,\quad\ldots,\quad a_1^nx_1+\cdots+(a_n^n-\omega)x_n=0$$

ein Gleichungssystem, dessen Determinante Δ die Eigenschaft hat, dass $\omega=\omega_1$ eine mehrfache Wurzel von $\Delta=0$ ist, ohne dass alle Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades von Δ für $\omega=\omega_1$ gleichzeitig verschwinden, dann hat bekanntlich das System (12.) für $\omega=\omega_1$ abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor ein einziges Lösungssystem $x_1=v_1,\ldots,x_n=v_n$. Bildet man nun mit diesem das neue Gleichungssystem

$$(13.)\qquad (a_1^1-\omega_1)x_1+\cdots+a_n^1x_n=v_1,\quad\ldots,\quad a_1^nx_1+\cdots+(a_n^n-\omega_1)x_n=v_n,$$

so lässt dieses ebenfalls Lösungen zu. Bezeichnen wir nämlich mit b_k^i den Coefficienten von a_k^i in Δ ($\omega=\omega_1$ gesetzt) und mit b_i^i den von $a_i^i-\omega_1$, dann kann man setzen

$$v_k = b_k^\lambda,$$

wo λ ein beliebiger Index ist, in Anbetracht, dass wegen $\Delta = 0$

$$b_1^\lambda : b_2^\lambda : \ldots : b_n^\lambda = b_1^\mu : b_2^\mu : \ldots : b_n^\mu.$$

Sollen nun die Gleichungen (13.) zusammen bestehen können, so ist nur nöthig, dass

$$\sum_k b_1^k v_k = \sum_k b_1^k b_k^1 = 0$$

ist. Da aber ω_1 eine vielfache Wurzel von $\Delta = 0$ ist, so muss für $\omega = \omega_1$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega} = -(b_1^1 + b_2^2 + \cdots + b_n^n) = 0$$

sein. Andererseits folgen aus der Relation

$$b_1^1 : b_k^1 = b_1^k : b_k^k$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_1^1 b_1^1 &= b_1^1 b_1^1, \\ b_1^1 b_2^2 &= b_1^2 b_2^1, \\ &\vdots \\ b_1^1 b_n^n &= b_1^n b_n^1, \end{aligned}$$

und durch Addition

$$b_1^1(b_1^1 + b_2^2 + \cdots + b_n^n) = \sum_k b_1^k b_k^1.$$

Die linke Seite verschwindet, folglich auch die rechte. q. e. d.

Eliminirt man jetzt in dem Gleichungssystem (11.), welches nur $n-1$ von einander unabhängige Gleichungen enthält, $y'', \ldots, y^{(n-1)}$, so erhält man

$$(14.) \qquad C_0 y + C_1 y' = \Sigma N_k u_1^{(k)},$$

worin $C_0 y + C_1 y' = 0$ die Differentialgleichung ist, die uns das Integral u_1 lieferte. Die durch blosse Quadratur vollziehbare Integration von (14.) liefert das Integral von u_2, welches bis auf die additive Function $c_1 u_1$ bestimmt ist.

Mit der neuen Function u_2 bildet man weiter das System von Gleichungen

$$f^{(k)}(y) = u_2^{(k)},$$

welche wiederum zusammen bestehen müssen, falls ω_1 eine dreifache Wurzel der Gleichung $|B_\lambda^k| = 0$ ist. Die Elimination derselben Grössen $y'', \ldots, y^{(n-1)}$ führt zu der Gleichung

$$C_0 y + C_1 y' = \Sigma N_k u_2^{(k)},$$

deren Integration die Function u_3 liefert. So fortfahrend gelangt man, falls ω_1 eine μ-fache Wurzel der Gleichung $|B_\lambda^k| = 0$ ist, zur Gleichung

$$C_0 y + C_1 y' = \Sigma N_k u_{\mu-1}^{(k)},$$

deren Integration u_μ giebt.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen Fall, dass ω_1 eine μ-fache Wurzel der Gleichung $\varDelta = 0$ ist, für welche gleichzeitig alle Unterdeterminanten $(n-1)$ten, $(n-2)$ten u. s. f. bis $(n-\lambda+1)$ten Grades incl. verschwinden, während die $(n-\lambda)$ten Grades nicht alle zugleich verschwinden. Das Gleichungssystem

$$c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{n1} = c_1 \omega_1, \quad \ldots, \quad c_1 a_{1n} + \cdots + c_n a_{nn} = c_n \omega_1$$

lässt dann λ Lösungen für die Verhältnisse der c zu. Zu jedem Lösungssystem

$$c_1^\varrho, \quad \ldots, \quad c_n^\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

gehören zwei entsprechende Verbindungen

$$c_1^\varrho y_1 + \cdots + c_n^\varrho y_n = u_1^\varrho, \quad c_1^\varrho \eta_1 + \cdots + c_n^\varrho \eta_n = v_1^\varrho$$

von der Beschaffenheit, dass

$$v_1^\varrho = \omega_1 u_1^\varrho$$

ist. Indem man, wie oben, u_1 für y_1 einführt, erhält man zwei neue Integrale

$$c_{12}^\varrho y_1 + \cdots + c_{n2}^\varrho y_n = u_2^\varrho, \quad c_{12}^\varrho \eta_1 + \cdots + c_{n2}^\varrho \eta_2 = v_2^\varrho,$$

zwischen denen die Beziehung besteht:

$$v_2^\varrho = \omega_1 u_2^\varrho + u_1^\varrho.$$

Fortfahrend gelangt man zu einer Gruppe von e_ϱ linearen Verbindungen von $y_1, \ldots, y_n$

$$u_1^\varrho, \quad u_2^\varrho, \quad \ldots, \quad u_{e_\varrho}^\varrho, \quad (u_\sigma^\varrho = c_{1\sigma}^\varrho y_1 + \cdots + c_{n\sigma}^\varrho y_n),$$

die mit den gleichen Verbindungen der zugehörigen Integrale

$$v_1^\varrho, \quad v_2^\varrho, \quad \ldots, \quad v_{e_\varrho}^\varrho, \quad (v_\sigma^\varrho = c_{1\sigma}^\varrho \eta_1 + \cdots + c_{n\sigma}^\varrho \eta_n)$$

in folgenden Beziehungen stehen:

$$v_1^\varrho = \omega_1 u_1^\varrho, \quad v_2^\varrho = \omega_1 u_2^\varrho + u_1^\varrho, \quad \ldots, \quad v_{e_\varrho}^\varrho = \omega_1 u_{e_\varrho}^\varrho + u_{e_\varrho - 1}^\varrho.$$

Solcher Gruppen giebt es λ, und es ist $\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=\lambda} e_\varrho = \mu$ gleich der Anzahl aller zur μ-fachen Wurzel ω_1 gehörigen Integrale.

Ist $e_1 = e_2 = \cdots = e_\lambda = 1$, also $\lambda = \mu$, dann besteht jede Gruppe aus einem Gliede. Ist $e_1 = \mu$, $e_2 = e_3 \ldots = e_\lambda = 0$, also $\lambda = 1$, dann haben wir den zuletzt besprochenen Fall, worin alle zur μ-fachen Wurzel gehörigen Integrale eine einzige Gruppe bilden. Multiplicirt man die Gleichungen (2.)

$$\eta_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \cdots + A_\nu y_k^{(\nu)}$$

mit $c_{k,\sigma}^\varrho$ und summirt über k von 1 bis n, so erhält man für $\sigma = 1, 2, \ldots, e_\varrho$,

wobei $c_{k1}^{\varrho} = c_k^{\varrho}$ zu nehmen ist, der Reihe nach die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} \omega_1 u_1^{\varrho} = A_0 u_1^{\varrho} + A_1 (u_1^{\varrho})' + \cdots + A_\nu (u_1^{\varrho})^{(\nu)}, \\ \omega_1 u_2^{\varrho} + u_1^{\varrho} = A_0 u_2^{\varrho} + A_1 (u_2^{\varrho})' + \cdots + A_\nu (u_2^{\varrho})^{(\nu)}, \\ \omega_1 u_3^{\varrho} + u_2^{\varrho} = A_0 u_3^{\varrho} + A_1 (u_3^{\varrho})' + \cdots + A_\nu (u_3^{\varrho})^{(\nu)}, \\ \vdots \\ \omega_1 u_{e_\varrho}^{\varrho} + u_{e_\varrho - 1}^{\varrho} = A_0 u_{e_\varrho}^{\varrho} + A_1 (u_{e_\varrho}^{\varrho})' + \cdots + A_\nu (u_{e_\varrho}^{\varrho})^{(\nu)}. \end{cases}$$

Zwischen den Integralen $u_1^{\varrho}, \ldots, u_{e_\varrho}^{\varrho}$ besteht, wie unmittelbar ersichtlich, keine homogene lineare Relation.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt: Die gegebene Differentialgleichung $P(y) = 0$ hat zunächst λ verschiedene Integrale u_1^{ϱ} $(\varrho = 1, 2, \ldots, \lambda)$ mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

gemeinsam, sodann ein Integral u_2^{ϱ} mit der linearen nicht homogenen Differentialgleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_1^{\varrho},$$

ferner ein Integral u_3^{ϱ} mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_2^{\varrho} \quad \text{u. s. f.},$$

zuletzt ein Integral $u_{e_\varrho}^{\varrho}$ mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_{e_\varrho - 1}^{\varrho}.$$

Alle Integrale, die $P(y) = 0$ mit der Gleichung

$$(16.)\quad (A_0 - \omega_1) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = u_{\sigma-1}^{\varrho}$$

gemein hat, sind in dem Ausdruck

$$c_1 u_1^1 + c_2 u_1^2 + \cdots + c_\lambda u_1^\lambda + u_\sigma^{\varrho}$$

enthalten, worin u_σ^{ϱ} ein bestimmtes Integral vorstehender Gleichung ist und $c_1, \ldots, c_\lambda$ willkürliche Constanten bedeuten. Denn das allgemeine Integral von (16.) ist $u_\sigma^{\varrho} + v$, wo v das allgemeine Integral der reducirten homogenen Gleichung von (16.) ist. Bedeutet nun w ein zweites Integral ausser u_σ^{ϱ}, das $P(y) = 0$ mit der Gleichung (16.) gemein hat, so ist $w - u_\sigma^{\varrho}$ ebenfalls ein Integral von $P(y) = 0$, welches gleichzeitig die Gleichung (9.)

$$(A_0 - \omega) y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

befriedigt. Diese beiden Gleichungen haben aber nur die λ particulären Integrale u_1^{ϱ} $(\varrho = 1, 2, \ldots, \lambda)$ gemeinsam, mithin ist

$$w = u_\sigma^{\varrho} + c_1 u_1^1 + \cdots + c_\lambda u_1^\lambda.$$

Aus dieser Bemerkung folgt, dass, wenn die Integrale $u_1^\varrho (\varrho = 1, 2, \dots, \lambda)$ bekannt sind, die übrigen Integrale u_σ^ϱ $(\sigma = 2, 3, \dots, e_\varrho,\ \varrho = 1, 2, \dots, \lambda)$ durch blosse Quadraturen bestimmbar sind. Die Integrale u_1^ϱ erhält man durch Aufsuchung der gemeinsamen Integrale von $P(y) = 0$ mit der Gleichung

$$f(y) \equiv (A_0 - \omega)y + A_1 y' + \dots + A_\nu y^{(\nu)} = 0,$$

deren Derivirte wir, wie oben, in der Form

$$(17.)\qquad f^{(k)}(y) \equiv B_0^k y + B_1^k y' + \dots + B_{n-1}^{(k)} y^{(n-1)} = 0$$

schreiben. Im vorliegenden Falle hat die Gleichung $|B_i^k| = 0$ ω_1 zur μ-fachen Wurzel, und es müssen von den Gleichungen (17.) $n-\lambda$ von einander unabhängig sein, während die übrigen Folgen der ersteren sind. Kriterium dafür ist, dass wie von Δ auch von $|B_i^k|$ alle Unterdeterminanten $(n-1)$ten, $(n-2)$ten ... bis $(n-\lambda+1)$ten Grades für $\omega = \omega_1$ verschwinden, während die $(n-\lambda)$ten Grades nicht sämmtlich zugleich verschwinden. Die Elimination der Derivirten $y^{(\lambda+1)}, \dots, y^{(n)}$ aus $n-\lambda$ unabhängigen unter den Gleichungen (17.) führt zu der linearen homogenen Differentialgleichung λter Ordnung

$$(18.)\qquad C_0 y + C_1 y' + \dots + C_\lambda y^{(\lambda)} = 0,$$

welche zunächst aufzulösen ist und die Integrale u_1^ϱ $(\varrho = 1, 2, \dots, \lambda)$ liefert.

u_1^ϱ ist nach dem Obigen das Anfangsglied einer Gruppe von e_ϱ Integralen. Um diese zu finden, bilde man das Gleichungssystem

$$(19.)\qquad f^{(k)}(y) \equiv B_0^k y + B_1^k y' + \dots + B_{n-1}^k y^{(n-1)} = (u_1^\varrho)^{(k)}. \qquad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

Können diese n Gleichungen nicht zusammen bestehen, so ist $e_\varrho = 1$, die fragliche Gruppe besteht also aus einem einzigen Gliede u_1^ϱ. Ist aber das System (19.) erfüllbar, so erhält man durch Elimination derselben Derivirten $y^{(\lambda+1)}, \dots, y^{(n)}$ aus (19.) die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$(20.)\qquad C_0 y + C_1 y' + \dots + C_\lambda y^{(\lambda)} = \Sigma N_k (u_1^\varrho)^{(k)}.$$

Diese ist, nachdem die Gleichung (18.) integrirt ist, durch blosse Quadraturen zu lösen. Sei u_2^ϱ ein Integral von (20.), so bilde man mit demselben nunmehr das Gleichungssystem

$$(21.)\qquad f^{(k)}(y) = (u_2^\varrho)^{(k)}. \qquad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

Ist dieses nicht erfüllbar, dann ist $e_\varrho = 2$, und die mit u_1^ϱ beginnende Gruppe besteht aus zwei Gliedern. Im anderen Falle wird man durch Elimination von $y^{(\lambda+1)}, \dots, y^{(n)}$ aus den Gleichungen (21.) auf die Gleichung

$$C_0 y + C_1 y' + \dots + C_\lambda y^{(\lambda)} = \Sigma N_k (u_2^\varrho)^{(k)}$$

geführt, deren Lösung wieder durch blosse Quadratur geschieht und als Integral die neue Function u_3^ϱ liefert. Mit dieser bildet man das neue System

$$f^{(k)}(y) = (u_3^\varrho)^{(k)}, \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

bis man in Fortsetzung des Verfahrens zu einem System

$$f^{(k)}(y) = (u_s^\varrho)^{(k)} \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

gelangt, welches nicht mehr erfüllbar ist. Die Zahl s giebt die Anzahl e_ϱ der Glieder der zu u_1^ϱ gehörigen Gruppe an. Das letzte noch erfüllbare System

$$f^{(k)}(y) = (u_{e_\varrho-1}^\varrho)^{(k)} \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

führt auf die Differentialgleichung

$$C_0y+C_1y'+\dots+C_\lambda y^{(\lambda)} = \Sigma N_k(u_{e_\varrho-1}^\varrho)^{(k)},$$

deren Integral das letzte Glied der Gruppe $u_{e_\varrho}^\varrho$ liefert. Indem man so mit jedem Integrale $u_1^\varrho(\varrho=1,2,\dots,\lambda)$ der Differentialgleichung (18.) verfährt, erhält man sämmtliche μ zur μ-fachen Wurzel ω_1 der Gleichung $|B_l^k|=0$ gehörigen Integrale von $P(y)=0$, und zwar λ Integrale durch Auflösung einer linearen Differentialgleichung λter Ordnung, die übrigen $\mu-\lambda$ Integrale durch blosse Quadraturen.

Im Vorangehenden haben wir aus der Annahme, dass eine Relation von der Form (1.) mit denselben Coefficienten A für n verschiedene Integrale y_1 besteht, erschlossen, dass die gegebene Gleichung $P(y)=0$ mit der Gleichung

$$f(y)\equiv(A_0-\omega)y+A_1y'+\dots+A_\nu y^{(\nu)}=0$$

ein Integral gemeinsam habe, wo ω eine Constante ist, die durch eine algebraische Gleichung $n$ten Grades bestimmt ist und daher im allgemeinen n Werthe hat. Hinreichende Bedingung dafür ist jedoch schon, wie wir gesehen haben, dass die Determinante der Coefficienten der Gleichungen

$$f^{(k)}(y)\equiv B_0^ky+B_1^ky'+\dots+B_\nu^ky^{(\nu)}=0,$$

$|B_l^k|$ $(k,l=0,1,2,\dots,n-1)$, von x unabhängig, ein Polynom $n$ten Grades in ω mit constanten Coefficienten ist, auch ohne dass y_1 n verschiedene Zweige hat.

Ist $|B_l^k|$ nicht von x unabhängig, so kann es vorkommen, dass diese Determinante einen Factor $m$ten Grades $(m<n)$ in ω mit constanten Coefficienten enthält. Dann giebt es m Gleichungen von der Form

$$(A_0-\omega)y+A_1y'+\dots+A_\nu y^{(\nu)} = 0,$$

mit denen $P(y) = 0$ je ein Integral gemein hat. Dies wird z. B. immer der Fall sein, wenn das Integral y_1 in der Relation (1.) m verschiedene Zweige hat und die Differentialgleichung $m$ter Ordnung, $Q(y) = 0$, der y_1 genügt, zugleich von η_1 befriedigt wird. Denn dann wird man betreffs der Gleichung $Q(y) = 0$, ganz ebenso wie im Falle, dass y_1 n Zweige hat, betreffs der Gleichung $P(y) = 0$, schliessen, dass $Q(y) = 0$ mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega)y + A_1 y' + \cdots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

ein Integral gemein hat, wo ω jetzt Wurzel einer Gleichung $m$ten Grades ist. Da aber alle Integrale von $Q(y) = 0$ auch $P(y) = 0$ angehören, so gilt dasselbe für $P(y) = 0$.

Es erübrigt noch der Fall, dass die Determinante $|B_i^k|$ für keinen von x unabhängigen Werth von ω verschwindet. Das Integral y_1 in der vorausgesetzten Relation (1.) muss dann nach dem Obigen einer Differentialgleichung niedrigerer als $n$ter Ordnung angehören, der η_1 aber nicht genügt. Um diese Differentialgleichung zu erhalten, differentiiren wir die Relation (1.) n-mal hintereinander nach x und drücken die Ableitungen $y_1^{(n)}$, $y_1^{(n+1)}$, ... durch y_1, y_1', ..., $y_1^{(n-1)}$ aus mittelst der gegebenen Gleichung $P(y) = 0$, welche die Form habe:

$$p_0 y^n + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0.$$

Die so erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_0 y_1 + \cdots + A_\nu y_1^{(\nu)}, \\ \eta_1' &= A_{10} y_1 + A_{11} y_1' + \cdots + A_{1,n-1} y_1^{(n-1)}, \\ \eta_1^{(n)} &= A_{n0} y_1 + A_{n1} y_1' + \cdots + A_{n,n-1} y_1^{(n-1)} \end{aligned}$$

addiren wir, nachdem sie der Reihe nach mit p_n, p_{n-1}, ..., p_1, p_0 multiplicirt sind, so ergiebt sich, da η_1 auch ein Integral der Gleichung $P(y) = 0$ ist, die Gleichung

$$(22.) \qquad R(y_1) \equiv r_0 y_1^{(n-1)} + r_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + r_{n-1} y_1 = 0.$$

Die Gleichungen $P(y) = 0$, $R(y) = 0$ haben demnach das gemeinsame Integral y_1, und aus ihnen ist mittelst der Methode der Aufsuchung sämmtlicher gemeinsamen particulären Integrale zweier Differentialgleichungen die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der y_1 genügt, herzustellen.

Es könnte scheinen, dass man auf diesem Wege von vornherein die Reductibilität von $P(y) = 0$ im Falle des Bestehens der Relation (1.) hätte beweisen können. Allein wenn, wie z. B. im ersten Abschnitt angenommen ist,

das Integral y_1 n verschiedene Zweige hat, dann kann y_1 keiner linearen Differentialgleichung niedrigerer als $n$ter Ordnung genügen, und die Gleichung (22.) kann somit nicht bestehen, ohne dass die Coefficienten $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ sämmtlich identisch verschwinden. Da hiermit (S. 125) die algebraische Bedingung verbunden ist, dass die Determinante $|B_i^k|$ von x unabhängig ist, so werden jedesmal, wo dies der Fall ist, auch wenn y_1 weniger als n Zweige hat, die Coefficienten $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ identisch verschwinden. Der hier eingeschlagene Weg würde daher in diesem Falle nicht auf eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung für y_1 und überhaupt nicht zur Erkenntniss der Reductibilität der Gleichung $P(y) = 0$ führen. Die Eigenschaft, dass sie mit der Gleichung

$$(A_0 - \omega)y + A_1 y' + \dots + A_\nu y^{(\nu)} = 0$$

ein Integral gemeinsam hat und alle daraus fliessenden Folgen, wie sie im ersten Abschnitt für den angenommenen Fall auseinandergesetzt sind, würden hierbei ganz unbemerkt bleiben.

Zum Schluss behandeln wir als Beispiel eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(23.)\qquad P(y) \equiv y'' + py' + qy = 0.$$

Zwischen zwei Integralen η, ζ derselben bestehe die Relation

$$(24.)\qquad \zeta = A\eta + B\eta' \quad (A \text{ und } B \text{ eindeutige Coefficienten von } x).$$

Wir bilden die Gleichung

$$(A-\omega)\eta + B\eta' = 0$$

und durch Differentiation

$$(A' - Bq)\eta + (A + B' - Bp - \omega)\eta' = 0.$$

Die Determinante derselben ist

$$\begin{vmatrix} A-\omega & B \\ A'-Bq & A+B'-Bp-\omega \end{vmatrix} = \omega^2 - (2A+B'-Bp)\omega + A^2 + AB' - A'B - ABp + B^2 q.$$

Wir bestimmen nun p und q so, dass die Determinante von x unabhängig wird, indem wir setzen:

$$p = \frac{2A+B'-2c}{B}, \quad q = \frac{A^2 + A'B - 2Ac + c_1}{B^2},$$

wo c und c_1 willkürliche Constanten sind. Die Gleichung für ω lautet dann:

$$(25.)\qquad \begin{vmatrix} A-\omega & B \\ \dfrac{2Ac-c_1-A^2}{B} & 2c-A-\omega \end{vmatrix} = \omega^2 - 2c\omega + c_1 = 0.$$

Zunächst überzeugen wir uns, dass man hier durch zweimalige Differentiation von (24.) mit Benutzung von (23.) zwar zu einer Differentialgleichung erster Ordnung für η gelangt, in der aber die Coefficienten sämmtlich verschwinden, so dass auf diesem Wege die Reductibilität der Gleichung (23.) nicht erkennbar wird. Es ist nämlich

$$\zeta = A\eta + B\eta',$$

$$\zeta' = (A' - Bq)\eta + (A + B' - Bp)\eta',$$

$$\zeta'' = ((A' - Bq)' - (A + B' - Bp)q)\eta + (A' - Bq + (A + B' - Bp)' - (A + B' - Bp)p)\eta,$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit q, p, 1 und Addition:

$$\zeta'' + p\zeta' + q\zeta = 0 = r_0\eta + r_1\eta',$$

wo

$$r_0 = (A' - Bq)' - B'q + A'p, \quad r_1 = A' + (A + B' - Bp)',$$

und durch Einsetzen der Ausdrücke für p und q:

$$r_0 = \left(\frac{2Ac - c_1 - A^2}{B}\right)' - \frac{B'}{B^2}(A^2 + A'B - 2Ac + c_1) + \frac{A'}{B}(2A + B' - 2c) = 0,$$

$$r_1 = A' + (2c - A)' = 0.$$

Dass keine Differentialgleichung erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten für η zu Stande kommt, zeigt an, dass im Allgemeinen, nämlich für beliebige A und B, die Function η zwei linear unabhängige Zweige hat. Trotzdem ist die Gleichung (23.), wenn für p und q die obigen Ausdrücke gesetzt werden, für beliebige A und B reductibel. Sie hat nämlich mit den Gleichungen

$$(A - \omega_1)y + By' = 0,$$

$$(A - \omega_2)y + By' = 0$$

je ein Integral gemein, wo $\omega_1 = c + \sqrt{c^2 - c_1}$, $\omega_2 = c - \sqrt{c^2 - c_1}$, falls $c^2 - c_1$ von Null verschieden ist. Die Integrale sind

$$u_1 = e^{-\int \frac{A - \omega_1}{B} dx}, \quad u_2 = e^{-\int \frac{A - \omega_2}{B} dx},$$

welche in der That die Gleichung (23.) befriedigen, wenn für p und q die obigen Ausdrücke substituirt werden. Setzt man

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \eta, \quad \omega_1 \alpha_1 u_1 + \omega_2 \alpha_2 u_2 = \zeta,$$

so besteht zwischen η und ζ die Relation (24.):

$$\zeta = A\eta + B\eta',$$

und man erkennt, dass η bei beliebigem A und B zwei von einander unabhängige Zweige hat.

Ist $c^2 - c_1 = 0$, also $\omega_1 = \omega_2 = c$, so kann hier nicht der Fall eintreten, dass die Unterdeterminanten der Determinante (25.), d. h. also die einzelnen Elemente, sämmtlich verschwinden. Denn wäre $B = 0$, $A = \omega = c$, so wäre in der Relation (24.) ζ kein von η verschiedenes Integral. Die Gleichung (23.) hat daher in diesem Falle, der früheren Auseinandersetzung gemäss, ein Integral u_1 mit der Gleichung

$$(A-c)y+By' = 0,$$

und ein zweites Integral u_2 mit der Gleichung

$$(A-c)y+By' = u_1$$

gemein. Die Integrale sind

$$u_1 = e^{-\int \frac{A-c}{B} dx}, \quad u_2 = e^{-\int \frac{A-c}{B} dx} \cdot \int \frac{dx}{B}.$$

Setzt man

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \eta, \quad (\alpha_1 c + \alpha_2) u_1 + \alpha_2 c u_2 = \zeta$$

so erfüllen die Integrale η und ζ die Relation (24.).

Ueber die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Es sei y eine *ganze* algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen x, d. h. eine solche, die für alle endlichen Werthe von x ebenfalls endlich bleibt, und

$$(1.)\qquad y^n + A_1(x)y^{n-1} + \cdots + A_n(x) = 0$$

die Gleichung des niedrigsten Grades, welcher y als Function von x genügt; dann sind die Coefficienten $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sämmtlich *ganze* rationale Functionen von x, weil anderenfalls y für endliche Werthe von x unendlich gross werden würde.

Jede rationale Function z von x und y, d. h. jede Grösse des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x, y)$, genügt dann, als Function von x betrachtet, ebenfalls einer Gleichung des $n$ten Grades:

$$(2.)\qquad z^n + B_1(x)z^{n-1} + \cdots + B_n(x) = 0$$

deren Coefficienten rationale, aber im allgemeinen gebrochene Functionen von x sind; dieselben sind nämlich dann und nur dann sämmtlich ganz, wenn auch z, ebenso wie y, eine *ganze* algebraische Function von x ist, d. h. wenn z für endliche Werthe von x niemals unendlich gross wird.

Die Fundamentalaufgabe der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen besteht nun darin, alle *ganzen* algebraischen Functionen z des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}(x, y)$ vollständig aufzusuchen und darzustellen.

Bekanntlich kann man zunächst überhaupt alle rationalen Functionen von x und y, d. h. alle algebraischen Functionen jenes Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$, durch n linear unabhängige unter ihnen, etwa durch die n Potenzen von y

$$(3.)\qquad 1,\ y,\ y^2,\ \ldots,\ y^{n-1},$$

homogen und linear in der Art darstellen, dass die Coefficienten rationale Functionen von x allein sind. Ist nun diese Darstellung die folgende:

$$(3^a.)\qquad z = u_0+u_1y+\cdots+u_{n-1}y^{n-1},$$

so ist z dann sicher auch algebraisch ganz, wenn die n Coefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *ganze* rationale Functionen von x sind, weil ja die n Functionen (3.) sämmtlich algebraisch ganz sind. Indessen braucht diese Bedingung nicht nothwendig erfüllt zu sein, es kann vielmehr z in der Darstellung (3ᵃ.) in gebrochener Form erscheinen, und trotzdem algebraisch ganz sein. In einer anderen Arbeit*) habe ich aber nachgewiesen, dass alsdann der gemeinsame Nenner aller Coefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ in dieser Darstellung von z nur eine beschränkte Anzahl von ganz bestimmten leicht aufzufindenden Linearfactoren besitzen kann.

Ist also $x-a$ einer der Factoren, welche jener Nenner enthält, so ist nur zu untersuchen, wie die Coefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ als ganze Functionen von x in der allgemeinsten Weise bestimmt werden müssen, damit der Quotient

$$(3^b.)\qquad \bar{y} = \frac{z}{x-a} = \frac{u_0+u_1y+\cdots+u_{n-1}y^{n-1}}{x-a}$$

algebraisch ganz wird, ohne dass alle n Coefficienten jenen Linearfactor enthalten, d. h. ohne dass sich der Nenner einfach forthebt. Diese Aufgabe wird in der vorliegenden Arbeit vollständig gelöst, und es ergiebt sich einmal, dass alle ganzen algebraischen Functionen, welche in der gebrochenen Form (3ᵇ.) erscheinen, durch eine Anzahl unter ihnen

$$(4.)\qquad \bar{y}^{(n)},\quad \bar{y}^{(n+1)},\quad \ldots,\quad \bar{y}^{(n+\nu-1)}$$

homogen und linear mit ganzen Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden können, und ferner dass diese ν Functionen (4.) durch die Auflösung einer Anzahl homogener linearer Gleichungen gefunden werden. Nimmt man also die ν Functionen (4.) zu den in (3.) angegebenen hinzu, so erhält man jetzt ein System:

$$(5.)\qquad 1,\ y,\ \ldots,\ y^{n-1};\ \bar{y}^{(n)},\ \ldots,\ \bar{y}^{(n+\nu-1)}$$

von $n+\nu$ ganzen algebraischen Functionen, durch welches alle diejenigen ganzen Functionen noch mit ganzen Coefficienten homogen und linear dar-

*) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, dieses Journal Bd. 109 S. 1—42. Vgl. auch *Kroneckers* Festschrift §§ 6 u. 7.

stellbar sind, welche bei ihrer Darstellung durch das ursprüngliche System (3.) in gebrochener Form, aber nur mit dem gemeinsamen Nenner $x-a$ behaftet erschienen.

Diese $n+\nu$ Functionen (5.) können aber, wie sich sehr leicht zeigen lässt*), durch nur n unter ihnen homogen und linear mit *ganzen* Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden. Bezeichnet man diese n Functionen durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$, so ist man also von dem Systeme

$$(3.) \qquad 1, \; y, \; \ldots, \; y^{n-1}$$

ausgehend zu einem neuen Systeme von n ganzen algebraischen Functionen

$$(5^a.) \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n$$

gelangt, durch welches jetzt auch noch alle *diejenigen* ganzen algebraischen Functionen mit *ganzen* Coefficienten dargestellt werden können, welche durch das erste System (3.) ausgedrückt als Brüche mit dem Nenner $x-a$ erschienen.

Untersucht man jetzt die Functionen

$$z = u'_1 y_1 + \cdots + u'_n y_n$$

wie vorher auf ihre algebraische Theilbarkeit durch einen der noch übrigen möglichen Linearfactoren $x-a'$, so gelangt man wieder zu einem neuen Systeme von n ganzen algebraischen Functionen $y'_1, \ldots, y'_n$, durch welche alle in der Form

$$\frac{u'_1 y_1 + \cdots + u'_n y_n}{x-a'}$$

enthaltenen ganzen algebraischen Grössen homogen und linear mit *ganzen* Coefficienten dargestellt werden können. Beseitigt man also, auf dieselbe Weise fortgehend, einen der möglichen Nenner nach dem anderen, so gelangt man zuletzt zu einem System von n unabhängigen ganzen algebraischen Functionen von (x, y):

$$\eta_1, \; \eta_2, \; \ldots, \; \eta_n,$$

durch welches *alle* ganzen algebraischen Functionen des Bereiches und nur sie homogen und linear mit ganzen Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden können. Hat man ein solches *Fundamentalsystem* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ gefunden, so besitzt man eine vollständige Darstellung aller ganzen, oder, was dasselbe ist, aller im Endlichen endlichen algebraischen

*) Vgl. z. B. die in der vorigen Anmerkung erwähnte Arbeit S. 25 flgde. u. § 7 der Festschrift.

Functionen in der Form

$$z = u_1 r_1 + \cdots + u_n r_n,$$

in der die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ beliebige *ganze* Functionen von x sind, und die gestellte Fundamentalaufgabe ist somit gelöst.

Nach den soeben gegebenen Darlegungen reducirt sich also die Frage nach der Aufstellung eines Fundamentalsystems auf die Lösung der folgenden Aufgabe:

A) Es seien

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n$$

n unabhängige ganze algebraische Functionen von x; es sollen die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in der allgemeinsten Weise als ganze Functionen von x so bestimmt werden, dass die algebraische Function

$$z = u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n$$

durch einen gegebenen Linearfactor $x-a$ algebraisch theilbar ist.

Da es sich hier nur um die Theilbarkeit von z durch $x-a$ handelt, so kann man offenbar die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ durch die von x nicht mehr abhängenden Reste ersetzen, welche sie nach der Division durch $x-a$ lassen, oder, was ganz dasselbe ist, man kann $u_1, \ldots, u_n$ von vorn herein als *Constanten* voraussetzen, und dies soll daher in der folgenden Untersuchung stets geschehen.

Die vollständige Lösung der Aufgabe (A.), auf welche nunmehr die ganze Frage zurückgeführt ist, bietet wesentliche Schwierigkeiten dar; diese lassen sich aber dadurch beseitigen, dass man den Begriff der algebraischen Theilbarkeit in einem etwas erweiterten Sinne auffasst. Hierzu führen die folgenden Ueberlegungen:

Es sei z eine ganze algebraische Function des Bereiches $\mathfrak{G}(x, y)$ und

$$z^n + B_1(x) z^{n-1} + \cdots + B_n(x) = 0 \tag{6.}$$

die Gleichung mit ganzen Coefficienten, der z genügt. Ist nun δ ein beliebiger nicht negativer Bruch, so soll z algebraisch theilbar durch die gebrochene Potenz $(x-a)^\delta$ heissen, wenn der Quotient

$$w = \frac{z}{(x-a)^\delta}$$

für $x = a$ endlich bleibt, wenn also die aus (6.) sich ergebende Gleichung für w:

$$w^n + \frac{B_1(x)}{(x-a)^\delta} w^{n-1} + \frac{B_2(x)}{(x-a)^{2\delta}} w^{n-2} + \cdots + \frac{B_n(x)}{(x-a)^{n\delta}} = 0 \tag{6^a.}$$

lauter *ganze* Functionen von x als Coefficienten besitzt. Man erkennt leicht, dass diese weitere Definition der Theilbarkeit einer algebraischen Function durch die gebrochene Potenz eines Linearfactors $x-a$ mit der gewöhnlich gegebenen in dem speciellen Falle übereinstimmt, dass δ einer ganzen Zahl gleich ist.

Hiernach ist die algebraische Function z dann und nur dann durch die gebrochene Potenz $(x-a)^\delta$ algebraisch theilbar, wenn sich in der Gleichung (6.) alle Nenner fortheben, d. h. wenn die n Bedingungen:

$$(7.) \qquad B_i(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}(x-a)^{i\delta}). \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Nun ist aber eine ganze rationale Function $B(x)$ nur dann durch die gebrochene Potenz eines Linearfactors theilbar, wenn sie die nächst höhere ganzzahlige Potenz desselben enthält. Bezeichnet man also für die Folge stets die einem Bruche α zunächst liegende grössere ganze Zahl mit $[\alpha]$ (wobei $[\alpha]$ mit der Zahl α zusammenfallen soll, wenn diese bereits selbst ganz ist), so decken sich die n Congruenzen (7.) vollständig mit den folgenden:

$$(7^a.) \qquad B_i(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}(x-a)^{[i\delta]}). \qquad (i=1, \ldots, n)$$

Es sei nun z durch $(x-a)^\delta$ algebraisch theilbar, aber dies sei auch die höchste Potenz jenes Linearfactors, welche in z enthalten ist; ist also $\delta_1 > \delta$, so muss von den n Congruenzen:

$$(7^b.) \qquad B_i(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}(x-a)^{[i\delta_1]})$$

mindestens eine nicht erfüllt sein. Dann muss für wenigstens einen Werth von $i=1, 2, \ldots, n$

$$i\delta = [i\delta]$$

sein, denn sonst könnte man ja stets δ_1 um so wenig grösser als δ annehmen, dass für alle Werthe von i

$$[i\delta_1] = [i\delta]$$

ist, und somit die Congruenzen (7^b.) zugleich mit den in (7^a.) aufgestellten erfüllt wären.

Soll also eine algebraische Function z durch die δte Potenz eines Linearfactors *genau* theilbar sein, so muss mindestens eines der ersten n Vielfachen $i\delta$ des Exponenten einer ganzen Zahl m gleich, d. h. es muss der Exponent:

$$\delta = \frac{m}{i}$$

ein Bruch sein, dessen Nenner in der reducirten Form höchstens gleich n ist.

Unter diesen Exponenten sind für das Folgende diejenigen von besonderer Wichtigkeit, welche gleich oder kleiner als Eins sind. Ausser den beiden ganzen Zahlen Null und Eins selbst sind dies also alle echten Brüche, deren Nenner nicht grösser als n ist. Denkt man sie sich nach ihrer Grösse geordnet, so sind sie z. B. für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ beziehlich gleich:

$$\begin{array}{ll}
n = 1 & \delta = 0,\ 1, \\
2 & 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \\
3 & 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1, \\
4 & 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ 1, \\
5 & 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ 1.
\end{array}$$

Für einen beliebigen Werth von n ist die Anzahl ϱ der möglichen Exponenten δ durch die Gleichung gegeben:

$$\varrho = \varphi(0)+\varphi(1)+\cdots+\varphi(n),$$

wo $\varphi(i)$, wie gewöhnlich, die Anzahl aller ganzen Zahlen bedeutet, welche zu i relativ prim und dabei kleiner als i sind, und wo $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ ist. Denn es treten ja beim Uebergange vom Grade $n-1$ zu n ausser den für jenen bereits vorhandenen Brüchen δ noch die $\varphi(n)$ neuen echten Brüche auf, welche in der reducirten Form den Nenner n besitzen.

Im Folgenden sollen diese ϱ Exponenten δ nach ihrer Grösse geordnet und in dieser Reihenfolge mit

$$(8.) \qquad \delta_0,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_\varrho$$

bezeichnet werden, so dass also:

$$\delta_{k+1} > \delta_k; \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_\varrho = 1$$

ist. Von diesen Zahlen mag gleich hier eine charakteristische Eigenschaft hervorgehoben werden: Sind δ_k und δ_{k+1} irgend zwei auf einander folgende Brüche der Reihe (8.), und ist i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so kann *zwischen* den beiden Brüchen:

$$i\delta_k \quad \text{und} \quad i\delta_{k+1}$$

niemals eine ganze Zahl m liegen, denn die Annahme

$$i\delta_k < m < i\delta_{k+1}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\delta_k < \frac{m}{i} < \delta_{k+1}$$

steht mit der Voraussetzung im Widerspruch, dass die Brüche δ_k und δ_{k+1} in der Reihe (8.) unmittelbar auf einander folgen. Ist daher $(i\delta_k+\alpha)$ ein Bruch, welcher zwischen $i\delta_k$ und $i\delta_{k+1}$ liegt, so ist stets

$$(9.)\qquad [i\delta_k+\alpha] = [i\delta_{k+1}].$$

Auch die ganzen Zahlen $[i\delta_k]$ und $[i\delta_{k+1}]$ stimmen im allgemeinen überein; dieselben unterscheiden sich dann und nur dann, und zwar um eine Einheit, wenn $i\delta_k$ einer ganzen Zahl gleich ist. Es besteht also stets die Gleichung:

$$(9^a.)\qquad [i\delta_{k+1}] = [i\delta_k]+\varepsilon_k^{(i)},$$

wo $\varepsilon_k^{(i)}$ gleich Eins oder gleich Null ist, je nachdem die Zahl i ein genaues Vielfaches des Nenners von δ_k ist, oder nicht.

In der Aufgabe A) wird nach den Bedingungen gefragt, unter denen eine ganze algebraische Function z des Bereiches $\mathfrak{G}(x, y)$ durch die *erste* Potenz des Linearfactors $x-a$ algebraisch theilbar ist. Nun liegen aber zwischen den beiden extremen Annahmen, dass z jenen Linearfactor gar nicht, oder in der ersten Potenz enthält, noch die ϱ Möglichkeiten, dass z genau durch $(x-a)^{\delta_k}$ theilbar ist, wo δ_k irgend einen der gebrochenen Exponenten der Reihe (8.) bedeutet. Hierdurch wird man auf die Vermuthung geführt, dass sich die Lösung der Fundamentalaufgabe A) besonders einfach gestalten werde, wenn man, anstatt sprungweise von dem Exponenten $\delta_0 = 0$ des Linearfactors zu $\delta_\varrho = 1$ überzugehen, lieber von δ_k zu δ_{k+1} fortschreitet, d. h. diese Aufgabe für den Exponenten δ_{k+1} zu lösen versucht, unter der Voraussetzung, dass sie für δ_k bereits untersucht sei. Wir stellen uns daher zunächst die folgende einfachere Aufgabe.

B) Es seien

$$y_1,\quad y_2,\quad \dots,\quad y_m$$

m unabhängige ganze algebraische Functionen des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x, y)$, welche sämmtlich durch die gebrochene Potenz $(x-a)^{\delta_k}$ algebraisch theilbar sind, wo δ_k irgend eine Zahl der Reihe (8.) bedeutet, so dass also die algebraische Function

$$(10.)\qquad z = u_1y_1+u_2y_2+\dots+u_my_m$$

für unbestimmte Werthe der Constanten $u_1, \dots, u_m$ dieselbe Potenz von $x-a$ enthält. Es sollen nun jene m Constanten in der allgemeinsten Weise so bestimmt werden, dass z nicht bloss durch die $\delta_k$te, sondern auch durch die nächst höhere d. h. durch die δ_{k+1}te Potenz von $x-a$ algebraisch theilbar ist.

Eine sogleich anzugebende sehr einfache Ueberlegung lehrt nun, dass die Aufgabe A) und damit die ganze hier behandelte Frage unmittelbar auf das hier in B) aufgestellte Problem zurückgeführt werden kann, zu dessen Lösung wir jetzt übergehen.

Man kann nun zeigen, dass die in der Aufgabe B) geforderte Bestimmung der Coefficienten $u_1, \dots, u_m$ der Function z immer gegeben werden kann, und zwar allein durch die Auflösung einer Anzahl von leicht zu bildenden homogenen Gleichungen für jene m Constanten. Bildet man nämlich zunächst die Gleichung des $n$ten Grades, der die Function $z = u_1 y_1 + \cdots + u_m y_m$ in (10.) für unbestimmte $u_1, \dots, u_m$ genügt, so hat diese offenbar die Gestalt

$$(11.) \qquad z^n + B_1(u_1, \dots, u_m) z^{n-1} + \cdots + B_n(u_1, \dots, u_m) = 0,$$

wo $B_1(u_1, \dots, u_m), \dots, B_n(u_1, \dots, u_m)$, als die elementaren symmetrischen Functionen der n zu z conjugirten Functionen, ganze homogene Formen von $u_1, \dots, u_m$ sind, deren Dimensionen beziehlich gleich $1, 2, \dots, n$ und deren Coefficienten ganze Functionen von x sind.

Da nun nach der in B) gemachten Voraussetzung die Function z für unbestimmte $u_1, \dots, u_m$ durch $(x-a)^{\delta_k}$ algebraisch theilbar ist, so bestehen nach (7ᵃ.) die n Congruenzen:

$$(12.) \qquad B_i(u_1, \dots, u_m) \equiv 0 \; (\text{mod.} (x-a)^{[i\delta_k]}), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

d. h. es ist

$$(12^a.) \qquad B_i(u_1, \dots, u_m) = (x-a)^{[i\delta_k]} \overline{B}_i(u_1, \dots, u_m), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wo auch die Functionen $\overline{B}_i(u_1, \dots, u_m)$ ganze homogene Formen der $i$ten Dimension von $u_1, \dots, u_m$ mit ganzen Functionen von x als Coefficienten sind.

Soll nun z auch durch $(x-a)^{\delta_{k+1}}$ algebraisch theilbar sein, so müssen die m Constanten $u_1, \dots, u_m$ so bestimmt werden, dass die n Congruenzen (12.) nicht bloss für die Moduln $(x-a)^{[i\delta_k]}$ sondern auch für $(x-a)^{[i\delta_{k+1}]}$ bestehen; ersetzt man aber die linken Seiten jener Congruenzen durch ihre Ausdrücke in (12ᵃ.) und hebt alsdann mit dem Factor $(x-a)^{[i\delta_k]}$, so können jene Bedingungen in der folgenden einfachen Form geschrieben werden:

$$(13.) \qquad \overline{B}_i(u_1, \dots, u_m) \equiv 0 \; (\text{mod.} (x-a)^{[i\delta_{k+1}] - [i\delta_k]}).$$

Der hier auftretende Exponent von $x-a$ ist nun nach (9ᵃ.) im allgemeinen gleich Null, und nur dann gleich Eins, wenn $i\delta_k$ eine ganze Zahl ist; wir haben somit überhaupt nur diejenigen Formen $\overline{B}_i$ zu berücksichtigen, deren

Index ein genaues Vielfaches von dem Nenner des echten Bruches δ_k ist. Thut man dies, so können die gesuchten Bedingungen folgendermassen geschrieben werden:

$$(13^a.)\qquad \overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \quad \text{und} \quad (x-a) \qquad (i\delta_k = \text{einer ganzen Zahl}).$$

Da die Coefficienten der Formen $\overline{B}_i$ ganze Functionen von x sind, so sind jene Formen für constante Werthe von $u_1, \ldots, u_m$ dann und nur dann durch $x-a$ theilbar, wenn sie verschwinden, sobald man in ihnen die Variable x durch a ersetzt. Thut man dies und bezeichnet die so sich ergebenden homogenen Formen mit *constanten* Coefficienten beziehlich durch

$$(13^b.)\qquad \overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m \,|\, a), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

so gehen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Function $z = u_1 y_1 + \cdots + u_m y_m$ durch $(x-a)^{\delta_k+1}$ algebraisch theilbar ist, in die folgende Form über:

$$(14.)\qquad \overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m \,|\, a) = 0 \qquad (i\delta_k = \text{einer ganzen Zahl}).$$

Die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_m$ müssen somit den homogenen Bedingungsgleichungen (14.) genügen, deren Anzahl zwar im allgemeinen sehr klein ist (nämlich gleich der Anzahl der unterhalb n liegenden Multipla des Nenners von δ_k), deren Dimensionen jedoch zwischen 1 und n liegen.

Wir besitzen nun kein Mittel, um die allgemeinste Lösung eines Gleichungssystemes von der Form (14.) zu finden, sobald die Dimensionen desselben grösser sind als zwei. Dagegen kann man in unserem Falle die Gleichungen (14.) durch ein System *linearer* homogener Bedingungsgleichungen vollständig ersetzen und somit auch ihre allgemeinste Lösung wirklich finden. Bezeichnet man nämlich alle $(i-1)$ten Ableitungen der Formen $\overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m \,|\, a)$ nach den in ihnen auftretenden Unbestimmten $u_1, \ldots, u_m$ allgemein durch $\overline{B}_i^{(i-1)}$, d. h. setzt man:

$$(15.)\qquad \overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m \,|\, a) = \frac{\partial^{(i-1)} \overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m|a)}{\partial u_{k_1}, \ldots, \partial u_{k_{i-1}}}, \qquad (k_1, \ldots, k_{i-1} = 1, 2, \ldots, m)$$

so sind alle Ableitungen $\overline{B}_i^{(i-1)}$ homogene lineare Functionen von $u_1, \ldots, u_m$ mit constanten Coefficienten, und es gilt der bemerkenswerthe Satz:

Die Function $z = u_1 y_1 + \cdots + u_m y_m$ ist dann und nur dann durch die gebrochene Potenz $(x-a)^{\delta_k+1}$ algebraisch theilbar, wenn die Constanten

$u_1, \ldots, u_m$ den homogenen *linearen* Gleichungen

$$(15^a.) \qquad \overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m | a) = 0 \qquad (i\delta_k = \text{einer ganzen Zahl})$$

genügen.

Zum Beweise dieses Satzes, durch den die Aufgabe B) vollständig gelöst wird, nehmen wir an, dass die Coefficienten $u_1, \ldots, u_m$ der algebraischen Function z irgendwie so bestimmt sind, dass z durch $(x-a)^{\delta_{k+1}}$ algebraisch theilbar ist, dass also die Coefficienten der Gleichung (11.) für z den n Bedingungen genügen:

$$(16.) \qquad B_i(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}(x-a)^{i\delta_{k+1}}).$$

Da nun nach der in B) gemachten Voraussetzung die m Functionen $y_1, \ldots, y_m$ und damit auch die aus ihnen gebildete algebraische Function

$$z' = v_1 y_1 + \cdots + v_m y_m$$

für unbestimmte $v_1, \ldots, v_m$ durch $(x-a)^{\delta_k}$ theilbar ist, so folgt weiter, dass das Product:

$$(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}.z'$$

jenen Linearfactor in der δ_{k+1}ten Potenz enthält. Sind aber die beiden Functionen z und $(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}.z'$ durch $(x-a)^{\delta_{k+1}}$ theilbar, so gilt offenbar ein Gleiches auch von ihrer Summe:

$$z+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}.z' = (u_1+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}v_1)y_1+\cdots+(u_m+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}v_m)y_m;$$

hat man also $u_1, \ldots, u_m$ so angenommen, dass sie den Gleichungen (16.) genügen, so müssen diese erfüllt bleiben, wenn man in ihnen die Unbestimmten

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_m$$

beziehlich ersetzt durch:

$$u_1+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}.v_1, \quad \ldots, \quad u_m+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}v_m,$$

wo $v_1, \ldots, v_m$ ganz unbestimmte Constanten bedeuten. Umgekehrt fallen die n so sich ergebenden Congruenzen

$$(16^a.) \quad B_i(\ldots, u_h+(x-a)^{\delta_{k+1}-\delta_k}v_h, \ldots) \equiv 0 \quad (\text{mod.}(x-a)^{i\delta_{k+1}}) \quad (i=1, \ldots, n)$$

offenbar mit den in (16.) aufgestellten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zusammen, wenn man die Constanten $v_1, \ldots, v_m$ sämmtlich gleich Null annimmt, es können somit die Bedingungen (16.) durch diejenigen in (16^a.) ersetzt werden.

Entwickelt man nun die n Functionen B_i in (16ᵃ.) mit Hülfe des *Taylor*schen Satzes nach Producten von Potenzen der Unbestimmten $v_1, \ldots, v_m$, so muss bekanntlich der Coefficient eines jeden solchen Productes *für sich* durch $(x-a)^{i\delta_{k+1}}$ theilbar sein, damit ein Gleiches für die Functionen B_i gelten soll. Nun ist aber der Coefficient irgend eines Productes

$$v_{k_1} v_{k_2} \ldots v_{k_\lambda} \qquad (k_1, \ldots, k_\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

von λ der Unbestimmten v in dieser Entwickelung, abgesehen von einem Zahlenfactor, bekanntlich gleich:

$$(x-a)^{\lambda(\delta_{k+1}-\delta_k)} \frac{\partial^\lambda B_i(u_1, \ldots, u_m)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \ldots \partial u_{k_\lambda}}.$$

Bezeichnet man also ähnlich wie in (15.) mit

$$B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m)$$

jede der λten Ableitungen der Form $i$ter Dimension $B_i(u_1, \ldots, u_m)$ nach irgend welchen λ Unbestimmten, so geht aus den Bedingungen (16ᵃ.) als ein gleichwerthiges System von Congruenzen das folgende hervor:

$$(x-a)^{\lambda(\delta_{k+1}-\delta_k)} B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \pmod{(x-a)^{i\delta_{k+1}}}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(17.) \qquad B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \pmod{(x-a)^{(i-\lambda)\delta_{k+1}+\lambda\delta_k}} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \ldots, i-1 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{smallmatrix}\right).$$

Die dem äussersten Werthe $\lambda = i$ entsprechenden Bedingungen:

$$B_i^{(i)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \pmod{(x-a)^{i\delta_k}}$$

sind hier einfach fortgelassen worden, da sie nur besagen, dass *alle* Coefficienten der Form $B_i(u_1, \ldots, u_m)$ oder dass diese Form selbst für unbestimmte $u_1, \ldots, u_m$ durch $(x-a)^{i\delta_k}$ theilbar sein muss, eine Bedingung, welche nach (12.) von selbst erfüllt ist.

Aus den Bedingungen (17.) können die gesuchten linearen Gleichungen für die Coefficienten $u_1, \ldots, u_m$ nunmehr ohne Schwierigkeit gewonnen werden. Da nämlich die Ableitungen $B_i^{(\lambda)}$ sämmtlich ganze *rationale* Functionen von x sind, so müssen sie, falls sie durch eine gebrochene Potenz von $(x-a)$ theilbar sind, auch die nächst höhere ganzzahlige Potenz dieses Linearfactors enthalten, und es sind daher gleichbedeutend die Congruenzen

(17.) und die folgenden:

$$B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \quad (\text{mod.}(x-a)^{[(i-\lambda)\delta_{k+1}+\lambda\delta_k]}). \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, i-1)$$

Schreibt man aber die hier auftretenden Exponenten von $(x-a)$ in der Form:

$$[i\delta_k + (i-\lambda)(\delta_{k+1}-\delta_k)], \qquad ((i-\lambda) = 1, 2, \ldots, i)$$

so erkennt man, dass alle zwischen $i\delta_k$ und $i\delta_{k+1}$ liegen, wo nur die obere Grenze mit eingeschlossen ist; nach dem in (9.) bewiesenen Hülfssatze besteht also die Gleichung:

$$[i\delta_k + (i-\lambda)(\delta_{k+1}-\delta_k)] = [i\delta_{k+1}],$$

und mit Benutzung derselben gehen die Bedingungen (17.) über in die einfacheren:

$$(17^a.) \qquad B_i^{(\lambda)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}(x-a)^{[i\delta_{k+1}]}). \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Alle diese Congruenzen können nun durch diejenigen unter ihnen ersetzt werden, deren linke Seiten alle $(i-1)$ten Ableitungen der Formen B_i sind, d. h. durch das Congruenzensystem:

$$(17^b.) \qquad B_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}(x-a)^{[i\delta_{k+1}]}),$$

dessen linke Seiten lauter homogene *lineare* Functionen von $u_1, \ldots, u_m$ sind; nach dem *Euler*schen Satze über die homogenen Functionen sind nämlich alle Ableitungen $B_i^{(\lambda)}$ durch die $(i-1)$ten Ableitungen $B_i^{(i-1)}$ homogen und linear mit ganzen Coefficienten darstellbar, jene sind also von selbst durch $(x-a)^{[i\delta_{k+1}]}$ theilbar, sobald das Gleiche für diese der Fall ist.

Beachtet man weiter, dass aus der in (12^a.) gefundenen Gleichung:

$$B_i(u_1, \ldots, u_m) = (x-a)^{[i\delta_k]}\overline{B}_i(u_1, \ldots, u_m)$$

durch $(i-1)$-malige Differentiation nach irgend welchen der Unbestimmten $u_1, \ldots, u_m$ die Gleichungen

$$B_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m) = (x-a)^{[i\delta_k]}\overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m)$$

sich ergeben, so kann das System (17^b.) auch in der folgenden äquivalenten Form geschrieben werden:

$$\overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}(x-a)^{[i\delta_{k+1}]-[i\delta_k]});$$

und da dieser Exponent von $(x-a)$ nach (9^a.) im allgemeinen gleich Null und nur dann gleich Eins ist, wenn $i\delta_k$ einer ganzen Zahl gleich wird, so geht dieses Congruenzensystem in das folgende über:

$$\overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \ldots, u_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}(x-a)) \qquad (i\delta_k = \text{einer ganzen Zahl}).$$

Ersetzt man endlich auf der linken Seite dieser Congruenzen die Variable x überall durch a und bezeichnet die so sich ergebenden Formen wie vorher durch $\overline{B}_i^{(i-1)}(u_1,\dots,u_m|a)$, so gehen die Congruenzen in einfache Gleichungen über, und man erhält als Schlussresultat den bereits bei (15^a.) angegebenen Satz:

Sind $y_1, \dots, y_m$ ganze algebraische Functionen des Bereiches $\mathfrak{G}(x, y)$, welche sämmtlich durch die $\delta_k$te Potenz des Linearfactors theilbar sind, so ist die ganze algebraische Function $z = u_1 y_1 + \dots + u_m y_m$ dann und nur dann nicht bloss durch die $\delta_k$te sondern auch durch die nächst höhere δ_{k+1}te Potenz von $(x-a)$ theilbar, wenn die m Coefficienten $u_1, \dots, u_m$ den homogenen linearen Gleichungen:

$$\overline{B}_i^{(i-1)}(u_1, \dots, u_m\,|\,a) = 0 \quad (i\delta_k = \text{einer ganzen Zahl}) \tag{18.}$$

genügen. Hier sind die Linearformen $\overline{B}_i^{(i-1)}$ die Werthe, welche die $(i-1)$ten Ableitungen der homogenen Formen

$$\overline{B}_i(u_1, \dots, u_m) = \frac{1}{(x-a)^{[i\delta_k]}} B_i(u_1, \dots, u_m)$$

für $x = a$ annehmen, während $B_1, \dots, B_n$ die elementaren symmetrischen Functionen der algebraischen Function z für unbestimmte $u_1, \dots, u_m$ bedeuten.

Durch diesen Satz ist die Aufgabe, alle durch $(x-a)^{\delta_{k+1}}$ theilbaren algebraischen Functionen $u_1 y_1 + \dots + u_m y_m$ zu finden, auf die einfachere reducirt, die homogenen linearen Gleichungen (18.) für die m Constanten $u_1, \dots, u_m$ vollständig aufzulösen. Die elementare Aufgabe, einer Anzahl von homogenen linearen Gleichungen in der allgemeinsten Weise zu genügen, kann nun bekanntlich stets vollständig und zwar in der Weise gelöst werden, dass die m Unbekannten $u_1, \dots, u_m$ linear und homogen durch andere $u'_1, \dots, u'_{m'}$ ausgedrückt werden, deren Anzahl nicht grösser ist als m, und welche ihrerseits völlig beliebige constante Werthe annehmen können.

Es möge also die vollständige Auflösung der linearen Gleichungen (18.) die folgende sein:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_{11} u'_1 + \alpha_{12} u'_2 + \dots + \alpha_{1m'} u'_{m'}, \\ \vdots \\ u_m = \alpha_{m1} u'_1 + \alpha_{m2} u'_2 + \dots + \alpha_{mm'} u'_{m'}, \end{cases} \tag{19.}$$

worin also die Coefficienten (α_{ik}) bestimmte Constanten, die Grössen $u'_1, \dots, u'_{m'}$ aber völlig beliebig sind. Setzt man nun die hier gefundenen Werthe von

$u_1, \dots, u_m$ in die Function $z = u_1 y_1 + \dots + u_m y_m$ ein und ordnet den so sich ergebenden Ausdruck nach den neuen willkürlichen Constanten $u'_1, \dots, u'_{m'}$, so kann derselbe folgendermassen geschrieben werden:

$$(20.) \qquad z = u'_1 y'_1 + \dots + u'_{m'} y'_{m'},$$

wo die m' algebraischen Functionen $y'_1, \dots, y'_{m'}$ aus den ursprünglichen $y_1, \dots, y_m$ durch die Substitution:

$$(21.) \qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \dots + \alpha_{m1} y_m, \\ \vdots \\ y'_{m'} = \alpha_{1m'} y_1 + \alpha_{2m'} y_2 + \dots + \alpha_{mm'} y_m \end{cases}$$

hervorgehen, dessen Coefficientensystem das transponirte von dem in (19.) angegebenen ist.

Da nun die Coefficienten u' in (20.) ganz willkürlich bleiben, so erhält man die vollständige Lösung der Aufgabe B) nunmehr in dem folgenden Satze:

C) Alle in der Form $z = u_1 y_1 + \dots + u_m y_m$ enthaltenen ganzen algebraischen Functionen, welche nicht nur durch die $\delta_k$te sondern auch durch die δ_{k+1}te Potenz des Linearfactors $x-a$ algebraisch theilbar sind, lassen sich durch eine Anzahl m' von linear unabhängigen unter ihnen

$$y'_1, \quad y'_2, \quad \dots, \quad y'_{m'}$$

homogen und linear mit willkürlichen Constanten als Coefficienten darstellen, und diese m' Functionen ergeben sich aus der vollständigen Auflösung einer Anzahl von homogenen linearen Gleichungen für die Unbestimmten $u_1, \dots, u_m$, nämlich des Systems (18.).

Man kann nun leicht zeigen, dass durch diesen Satz auch ein directes und sehr einfaches Verfahren zur Lösung der Fundamentalaufgabe A) gegeben ist. Ist nämlich wieder:

$$(22.) \qquad y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_n$$

ein beliebiges System von n unabhängigen ganzen algebraischen Functionen, und stellt man sich die Aufgabe, alle in der Form:

$$(22^a.) \qquad z = u_1 y_1 + \dots + u_n y_n$$

enthaltenen Functionen zu finden, welche durch $x-a$ selbst algebraisch theilbar sind, so kann man dieser Frage jetzt auch die folgende Form geben:

Es sind die n Functionen (22.) gegeben, welche sämmtlich durch die $\delta_0$te, d. h. durch die nullte, Potenz von $x-a$ algebraisch theilbar sind;

es sollen alle in der Form (22ᵃ.) darstellbaren Functionen gefunden werden, welche auch die $\delta_\varrho$te, d. h. die erste Potenz jenes Linearfactors enthalten.

Soll nun die Function z durch $(x-a)^{\delta_\varrho}$ algebraisch theilbar sein, so muss sie a fortiori die $\delta_1$te Potenz von $x-a$ enthalten; die einfachere Aufgabe aber, alle Functionen z zu finden, welche nur durch diese gebrochene Potenz von $x-a$ divisibel sind, kann unmittelbar mit Hülfe des Satzes (C) gelöst werden, wenn man dort $\delta_k = \delta_0$, also $\delta_{k+1} = \delta_1$ annimmt. Derselbe lehrt, dass alle durch $(x-a)^{\delta_1}$ theilbaren Functionen, und nur sie, durch eine Anzahl unter ihnen

$$y'_1, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad y'_{n'}$$

homogen und linear mit constanten Coefficienten darstellen lassen, und diese n' Functionen ergeben sich ihrerseits durch die vollständige Auflösung der Gleichungen (18.) für $\delta_k = \delta_0$. Diejenigen Functionen z, welche durch $(x-a)^{\delta_1}$ algebraisch theilbar sind, und sie allein kommen für die weitere Untersuchung in Betracht, sind demnach alle in der Form:

$$(22^b.) \qquad z = u'_1 y'_1 + \cdots + u'_{n'} y'_{n'}$$

enthalten, in welcher die Coefficienten $u'_1, \ldots, u'_{n'}$ völlig willkürliche Constanten bedeuten.

Damit nun z nicht bloss durch die $\delta_1$te sondern auch durch die $\delta_\varrho$te Potenz von $x-a$ theilbar sei, ist wieder nothwendig, dass diese Function die $\delta_2$te Potenz jenes Linearfactors enthalte. Unter Anwendung des Satzes (C) für $\delta_k = \delta_1$ ergeben sich wieder alle Functionen z der Form (22ᵇ.), die dieser Bedingung genügen, als homogene lineare Functionen einer Anzahl unter ihnen, welche ihrerseits durch die vollständige Auflösung der linearen Gleichungen (18.) für $u'_1, \ldots, u'_{n'}$ und für $\delta_k = \delta_1$ gefunden werden.

Schreitet man in dieser Weise successive zu $\delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_\varrho$ fort, so ergiebt sich schliesslich das folgende Resultat, durch welches die Fundamentalaufgabe (A) vollständig gelöst wird:

Alle in der Form

$$z = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

darstellbaren ganzen algebraischen Functionen, welche durch einen gegebenen Linearfactor $x-a$ algebraisch theilbar sind, und nur sie,

D) lassen sich durch eine bestimmte Anzahl unter ihnen, welche mit:

$$(23.) \qquad y^{(n+1)}, \quad y^{(n+2)}, \quad \ldots, \quad y^{(n+\nu)}$$

bezeichnet werden mögen, homogen und linear mit ganzen Coefficienten ausdrücken. Diese ν unabhängigen Functionen (23.) ergeben sich aus der vollständigen Auflösung der linearen Gleichungen (18.), wenn man in ihnen δ_k successive gleich $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{e-1}$ annimmt.

Durch diesen Satz (D) ist in Verbindung mit den im Eingang dieser Arbeit gemachten Bemerkungen ein einfaches Verfahren gegeben, um aus einem beliebigen Systeme von rational unabhängigen ganzen algebraischen Functionen, etwa dem zuerst sich darbietenden $(1, y, \ldots, y^{n-1})$, durch Auflösung einer Anzahl linearer Gleichungen zu einem ***Fundamentalsysteme*** für die Gattung $\mathfrak{G}(x, y)$ zu gelangen.

Das hier gelöste Problem habe ich bereits in einem Theile meiner mehrerwähnten Arbeit im 109. Bande dieses Journals behandelt, und ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um ein dort auftretendes Versehen zu berichtigen, zu dessen Auffindung ich zuerst durch eine gütige Bemerkung des Herrn *Franklin* geführt wurde: Im vierten Abschnitt dieser Arbeit wird nämlich das dort mit (8.) bezeichnete Divisorensystem in das ihm äquivalente (11.) übergeführt, welches nicht mehr alle Coefficienten der Gleichung für w, sondern nur noch den letzten enthält. Diese Ueberführung setzt aber, wie a. a. O. ausdrücklich hervorgehoben wird, voraus, dass durch die betrachtete Form w die Zahl Eins, oder irgend eine zu $P(x_1, x_2)$ theilerfremde Form darstellbar sei. Berücksichtigt man aber diese Bemerkung bei der im fünften Abschnitt von dieser Aequivalenz gemachten Anwendung, so gelangt man zu einem etwas anderen Resultate, welches sich von dem in dieser Arbeit gefundenen nur formal unterscheidet. Ich brauche auf die Herleitung desselben aus dem Grunde nicht näher einzugehen, weil sie durch die hier gegebenen Ausführungen vollständig ersetzt wird, und weil das Resultat sich überdies nicht so einfach wie das hier angegebene aussprechen lässt. Ausserdem ist es mir gelungen, eine zweite ganz besonders einfache Methode zur Lösung dieser Fundamentalaufgabe zu finden, welche demnächst in den „Acta Mathematica“ veröffentlicht werden wird.

Um die hier durchgeführten Entwickelungen ohne Bezugnahme auf die weitergehenden Untersuchungen der vorigen Arbeit vollständig darlegen zu können, ist an die Stelle einer rationalen homogenen Form $P(x_1, x_2)$ hier von vorn herein ein Linearfactor $x-a$ als Modul betrachtet, und in Folge dessen sowohl von der rationalen Ausführung der Operationen, als auch von

der Betrachtung der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes abgesehen worden. Benutzt man aber die Entwickelungen der ersten drei Abschnitte jener Arbeit, so erhält man, wie noch ausdrücklich hervorgehoben werden mag, genau durch die hier benutzten Schlüsse eine Bestimmung des von mir in jener Arbeit zum ersten Male eingeführten absoluten Fundamentalsystemes (vgl. a. a. O. S. 29) auf rationalem Wege, allein durch die Benutzung des *Euklidischen* Verfahrens zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Theilers. Die Ausführung dieser Uebertragung ist so einfach, dass auf sie an dieser Stelle nicht näher eingegangen zu werden braucht.

Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen den Integralen verschiedener algebraischer partieller Differentialgleichungssysteme.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Bevor die Untersuchung in ihrer ganzen Allgemeinheit durchgeführt wird, soll die Methode zuerst an einfacheren Fällen erläutert werden, die zugleich eine Charakterisirung der algebraischen Beziehung selbst ermöglichen, welche im allgemeinen Falle nicht ausführbar ist.

Besteht zwischen einem Integrale $\bar{v}$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \alpha_1\frac{\partial v}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial v}{\partial z_n} = \gamma,$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \gamma$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ bedeuten, und den Integralen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ der m irreductibeln linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial z_1}+a_{12}\frac{\partial u_1}{\partial z_2}+\cdots+a_{1n}\frac{\partial u_1}{\partial z_n} = c_1, \\ a_{21}\frac{\partial u_2}{\partial z_1}+a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial z_2}+\cdots+a_{2n}\frac{\partial u_2}{\partial z_n} = c_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}\frac{\partial u_m}{\partial z_1}+a_{m2}\frac{\partial u_m}{\partial z_2}+\cdots+a_{mn}\frac{\partial u_m}{\partial z_n} = c_m, \end{cases}$$

worin die a und c ebenfalls aus $z_1, z_2, \ldots, z_n$ algebraisch zusammengesetzt sind, die algebraische Beziehung

$$(3.)\qquad \bar{v} = \omega(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m),$$

so folgt durch Einsetzen dieses Werthes von $\bar{v}$ in (1.):

$$\alpha_1\Big(\frac{\partial\omega}{\partial z_1}+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_1}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_m}\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_1}\Big)+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_n\Big(\frac{\partial\omega}{\partial z_n}+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_1}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_n}+\cdots+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_m}\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_n}\Big) = \gamma$$

oder

$$(4.)\quad \begin{cases} \alpha_1\frac{\partial\omega}{\partial z_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\omega}{\partial z_n}+\frac{\partial\omega}{\partial \bar{u}_1}\left(\alpha_1\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_n}\right)+\cdots \\ \qquad\cdots+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_m}\left(\alpha_1\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_n}\right)=\gamma. \end{cases}$$

Setzt man nun aus den Gleichungen (2.) die Werthe für $\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_1}$, $\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial z_1}$, ..., $\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_1}$ in (4.) ein, so ergiebt sich

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha_1\frac{\partial\omega}{\partial z_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\omega}{\partial z_n}+\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_1}\left(\left(\alpha_2-\alpha_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_2}+\cdots+\left(\alpha_n-\alpha_1\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_n}+\alpha_1\frac{c_1}{a_{11}}\right) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad +\frac{\partial\omega}{\partial\bar{u}_m}\left(\left(\alpha_2-\alpha_1\frac{a_{m2}}{a_{m1}}\right)\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_2}+\cdots+\left(\alpha_n-\alpha_1\frac{a_{mn}}{a_{m1}}\right)\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial z_n}+\alpha_1\frac{c_m}{a_{m1}}\right)=\gamma, \end{cases}$$

und nimmt man zur Irreductibilität der partiellen Differentialgleichungen (2.), d. h. zur Voraussetzung, dass keines ihrer Integrale einer algebraischen partiellen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung Genüge leistet, in welche nicht alle Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als unabhängige, sondern einige von ihnen nur als Parameter eintreten, noch die Annahme hinzu, dass auch zwischen den m Integralen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$, den n unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und den nach $n-1$ derselben genommenen ersten partiellen Differentialquotienten jener Integrale keine algebraische Beziehung stattfindet, so muss die Gleichung (5.) eine identische sein, und es müssen sich daher die Beziehungen ergeben:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{21}}=\cdots=\frac{a_{m2}}{a_{m1}}, \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\frac{a_{13}}{a_{11}}=\frac{a_{23}}{a_{21}}=\cdots=\frac{a_{m3}}{a_{m1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\alpha_n}{\alpha_1}=\frac{a_{1n}}{a_{11}}=\frac{a_{2n}}{a_{21}}=\cdots=\frac{a_{mn}}{a_{m1}}, \end{cases}$$

wonach die partiellen Differentialgleichungen (2.) die Form besitzen müssen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial u_1}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial u_1}{\partial z_n}=\frac{c_1}{a_{11}}\alpha_1=\gamma_1, \\ \alpha_1\frac{\partial u_2}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial u_2}{\partial z_n}=\frac{c_2}{a_{21}}\alpha_1=\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\frac{\partial u_m}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial u_m}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial u_m}{\partial z_n}=\frac{c_m}{a_{m1}}\alpha_1=\gamma_m, \end{cases}$$

während nach (5.) ω der oben gemachten Annahme zufolge der in z_1, $z_2, \ldots, z_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ identischen Gleichung genügen muss

$$(8.)\qquad \alpha_1\frac{\partial\omega}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial\omega}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\omega}{\partial z_n}+\gamma_1\frac{\partial\omega}{\partial u_1}+\gamma_2\frac{\partial\omega}{\partial u_2}+\cdots+\gamma_m\frac{\partial\omega}{\partial u_m} = \gamma,$$

die Function ω der Gleichung (3.) somit ein algebraisches Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(9.)\qquad \alpha_1\frac{\partial u}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial u}{\partial z_n}+\gamma_1\frac{\partial u}{\partial u_1}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial u_2}+\cdots+\gamma_m\frac{\partial u}{\partial u_m} = \gamma$$

sein wird, in welcher $z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ von einander unabhängige Variable bedeuten.

Da nun, wenn das totale Differentialgleichungsystem

$$(10.)\qquad \frac{dz_1}{\alpha_1}=\frac{dz_2}{\alpha_2}= \;\cdots\; =\frac{dz_n}{\alpha_n}=\frac{du_\varrho}{\gamma_\varrho}$$

die n Integralgleichungen besitzt:

$$(11.)\qquad \begin{cases} f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\delta_1, \quad f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\delta_2, \quad \ldots, \\ \qquad f_{n-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\delta_{n-1}, \quad u_\varrho-f_n^{(\varrho)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\delta_n, \end{cases}$$

jedes Integral der partiellen Differentialgleichungen (7.) in der Form darstellbar ist:

$$(12.)\qquad \begin{cases} u_1 = f_n^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)+\varphi_1\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}, \\ u_2 = f_n^{(2)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)+\varphi_2\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = f_n^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)+\varphi_m\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}, \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ willkürliche Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, ferner die partielle Differentialgleichung (9.), wenn $m+n$ Integralgleichungen des totalen Differentialgleichungsystems

$$(13.)\qquad \frac{dz_1}{\alpha_1}=\frac{dz_2}{\alpha_2}= \;\cdots\; =\frac{dz_n}{\alpha_n}=\frac{du_1}{\gamma_1}=\frac{du_2}{\gamma_2}= \;\cdots\; =\frac{du_m}{\gamma_m}=\frac{du}{\gamma}$$

durch

$$(14.)\qquad \begin{cases} f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\beta_1, \quad \ldots, \quad f_{n-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\beta_{n-1}, \\ u_1-f_n^{(1)}(z_1, \ldots, z_n)=\beta_n, \quad \ldots, \quad u_m-f_n^{(m)}(z_1, \ldots, z_n)=\beta_{n+m-1}, \\ u-f(z_1, \ldots, z_n)=\beta_{n+m} \end{cases}$$

dargestellt werden, das allgemeine Integral besitzt

$$(15.)\qquad u = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)+\Phi\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, u_1-f_n^{(1)}, u_2-f_n^{(2)}, \ldots, u_m-f_n^{(m)}\},$$

worin Φ wiederum eine willkürliche Function aller eingeschlossenen Grössen

bedeutet, so wird die Beziehung (3.), da ω ein Integral der partiellen Differentialgleichung (9.) war, die Form annehmen

(16.) $\bar{v} = f(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \Phi_1\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \bar{u}_1 - f_n^{(1)}, \bar{u}_2 - f_n^{(2)}, \ldots, \bar{u}_m - f_n^{(m)}\}$,

wenn Φ_1 eine bestimmte Function der eingeschlossenen Grössen darstellt.

Setzt man nun in (16.) statt $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ beliebige andere Integrale der partiellen Differentialgleichungen (7.), die sämmtlich in der Form (12.) dargestellt waren, und nennt $\bar{v}'$ den aus (16.) hervorgehenden Werth von $\bar{v}$, so folgt

$$(17.)\quad \begin{cases} \bar{v}' = f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \qquad + \Phi_1\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \psi_1(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}), \ldots, \psi_m(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})\}, \end{cases}$$

worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ bestimmte Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten. Da aber die Integration der partiellen Differentialgleichung (1.) von dem totalen Differentialgleichungsystem

$$(18.)\qquad \frac{dz_1}{\alpha_1} = \frac{dz_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{dz_n}{\alpha_n} = \frac{dv}{\gamma}$$

abhängt, so wird das allgemeine Integral derselben mit Benutzung der oben eingeführten Integralfunctionen durch

$$(19.)\qquad v = f(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \Omega(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$$

dargestellt sein, worin Ω eine willkürliche Function bedeutet, und somit wird $\bar{v}'$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1.) sein, *die algebraische Beziehung also zwischen beliebigen Integralen der Differentialgleichungen* (7.) *und einem passenden Integrale der Differentialgleichung* (1.) *erhalten bleiben.*

Aber wir können auch die Form der algebraischen Function ω feststellen, welche der Gleichung (8.) genügen musste; bestimmt man nämlich $u_1, u_2, \ldots, u_m$ so als algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$, dass den Gleichungen

$$(20.)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_m} = 0$$

genügt wird, dass sich also

$$(21.)\quad u_1 = a_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad u_2 = a_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \ldots, \quad u_m = a_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

ergiebt, worin $a_1, a_2, \ldots, a_m$ algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten oder gleich allgemeiner — und darin ist auch die Voraussetzung (20.) eingeschlossen — unter der Annahme, dass $\frac{\partial\omega}{\partial u_1}, \frac{\partial\omega}{\partial u_2}, \ldots,$

$\frac{\partial\omega}{\partial u_\mu}$ von $u_1, u_2, \dots, u_m$ unabhängig sind, also

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_2} = \varphi_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \dots, \\ \qquad\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u_\mu} = \varphi_\mu(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{cases}$$

und somit ω eine lineare Function von $u_1, u_2, \dots, u_\mu$ mit von $z_1, z_2, \dots, z_n$ algebraisch abhängigen Coefficienten ist, die Werthe von $u_{\mu+1}, u'_{\mu+2}, \dots, u_m$ aus den $\mu+1$ anderen Gleichungen

$$(23.)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_{\mu+2}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_m} = 0$$

als algebraische Functionen von $z_1, z_2, \dots, z_n$ in der Form

$$(24.)\quad u_{\mu+1} = a_{\mu+1}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \dots, \quad u_m = a_m(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

und setzt alsdann nach (3.)

$$(25.)\quad \begin{cases} v = \omega(z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_m) = \varphi_1(z_1, \dots, z_n)u_1 + \cdots \\ \qquad \cdots + \varphi_\mu(z_1, \dots, z_n)u_\mu + \omega_1(z_1, \dots, z_n, u_{\mu+1}, \dots, u_m), \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu, \omega_1$ algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, so folgt durch Einsetzen dieses Werthes in die in $z_1, \dots, z_n$, $u_1, \dots, u_m$ identische Gleichung (8.)

$$(26.)\quad \begin{cases} \left(\alpha_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} + \alpha_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n}\right)u_1 + \cdots + \left(\alpha_1\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_1} + \alpha_2\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_n}\right)u_\mu \\ \qquad + \alpha_1\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1} + \alpha_2\frac{\partial\omega_1}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial\omega_1}{\partial z_n} + \gamma_{\mu+1}\frac{\partial\omega_1}{\partial u_{\mu+1}} + \cdots + \gamma_m\frac{\partial\omega_1}{\partial u_m} \\ \qquad\qquad = \gamma - \gamma_1\varphi_1 - \cdots - \gamma_\mu\varphi_\mu, \end{cases}$$

und es ist daraus unmittelbar ersichtlich, *dass* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ *algebraische Integrale der partiellen Differentialgleichung*

$$(27.)\qquad \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial\varphi}{\partial z_n} = 0$$

sein müssen, während $\omega_1(z_1, \dots, z_n, u_{\mu+1}, \dots, u_m)$ ein algebraisches Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(28.)\quad \begin{cases} \alpha_1\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1} + \alpha_2\frac{\partial\omega_1}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial\omega_1}{\partial z_n} + \gamma_{\mu+1}\frac{\partial\omega_1}{\partial u_{\mu+1}} + \cdots + \gamma_m\frac{\partial\omega_1}{\partial u_m} \\ \qquad\qquad = \gamma - \gamma_1\varphi_1 - \cdots - \gamma_\mu\varphi_\mu \end{cases}$$

sein wird. Setzt man nun für $u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \dots, u_m$ die durch die Ausdrücke (24.) gegebenen algebraischen Functionalwerthe von $z_1, z_2, \dots, z_n$ in die

Function $\omega_1(z_1, z_2, \dots, z_n, u_{\mu+1}, \dots, u_m)$ ein, so wird die algebraische Function von $z_1, \dots, z_n$

$$(29.) \qquad \Omega_1 = \omega_1(z_1, \dots, z_n, a_{\mu+1}, \dots, a_m)$$

die Beziehungen liefern:

$$(30.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu+1}} \dfrac{\partial a_{\mu+1}}{\partial z_1} + \cdots + \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a_m} \dfrac{\partial a_m}{\partial z_1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_n} = \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z_n} + \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu+1}} \dfrac{\partial a_{\mu+1}}{\partial z_n} + \cdots + \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a_m} \dfrac{\partial a_m}{\partial z_n}, \end{cases}$$

und *somit wird der Ausdruck* (29.) vermöge (23.) *ein algebraisches Integral der partiellen Differentialgleichung*

$$(31.) \qquad \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \Omega}{\partial z_n} = \gamma - \gamma_1 \varphi_1 - \cdots - \gamma_\mu \varphi_\mu$$

sein.

Setzt man nun

$$(32.) \qquad \Omega_1 = V - \varphi_1 . u_1 - \varphi_2 . u_2 - \cdots - \varphi_\mu . u_\mu$$

und führt diesen Werth in (31.) ein, so folgt vermöge der Beziehungen

$$(33.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial V}{\partial z_1} - u_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} - \cdots - u_\mu \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_1} - \varphi_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} - \cdots - \varphi_\mu \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_n} = \dfrac{\partial V}{\partial z_n} - u_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} - \cdots - u_\mu \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_n} - \varphi_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z_n} - \cdots - \varphi_\mu \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_n}, \end{cases}$$

mit Berücksichtigung der Gleichungen (27.) und der ursprünglichen Differentialgleichungen (7.):

$$(34.) \qquad \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} + \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial V}{\partial z_n} = \gamma;$$

es ist somit V ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1.), und es *würde somit vermöge* (32.) *zwischen einem Integralsystem von* μ *der Differentialgleichungen* (7.) *und einem Integrale der Differentialgleichung* (1.) *eine algebraische Beziehung der Form stattfinden*

$$(35.) \qquad v - \varphi_1 . u_1 - \varphi_2 . u_2 - \cdots - \varphi_\mu . u_\mu = \Omega_1;$$

machen wir somit die Annahme, dass algebraische Beziehungen nicht schon zwischen Integralen von weniger als m der Differentialgleichungen (7.) *und*

einem Integrale der Differentialgleichung (1.) *stattfinden sollen, so muss* $\mu = m$ *sein und somit die algebraische Beziehung zwischen den Integralen die Form annehmen*

$$(36.)\qquad v = \varphi_1.u_1+\varphi_2.u_2+\cdots+\varphi_m.u_m+\Phi_1,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *algebraische Functionen von* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *bedeuten, welche der partiellen Differentialgleichung* (27.) *genügen, und* Φ_1, *wie unmittelbar zu sehen, ein in* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *algebraisches Integral der Differentialgleichung*

$$(37.)\qquad \alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial\Phi}{\partial z_n} = \gamma-\gamma_1\varphi_1-\gamma_2\varphi_2-\cdots-\gamma_m\varphi_m$$

ist.

Man sieht aber zugleich auch umgekehrt, *dass, wenn* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *irgend welche Integrale der partiellen Differentialgleichung* (7.) *bedeuten, ein Integral der Differentialgleichung* (1.) *mit diesen m Integralen durch eine Beziehung von der Form* (36.) *verbunden ist, worin* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *beliebige algebraische Integrale der Differentialgleichung* (27.) *und* Φ_1 *irgend ein algebraisches Integral der Differentialgleichung* (37.) *bedeutet.*

Fassen wir die eben gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz, welcher das Analogon zu dem bekannten Theorem von der Nothwendigkeit der *linearen* Form algebraischer Beziehungen zwischen *Abel*schen Integralen bildet:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zwischen einem Integralsystem der linearen algebraischen partiellen Differentialgleichungen

$$a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial z_1}+a_{12}\frac{\partial u_1}{\partial z_2}+\cdots+a_{1n}\frac{\partial u_1}{\partial z_n} = c_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}\frac{\partial u_m}{\partial z_1}+a_{m2}\frac{\partial u_m}{\partial z_2}+\cdots+a_{mn}\frac{\partial u_m}{\partial z_n} = c_m,$$

von denen nicht nur jede irreductibel sein soll, sondern die auch der Bedingung unterliegen, dass zwischen m ihrer Integrale, den n unabhängigen Variablen und den nach nur $n-1$ *dieser Variablen genommenen ersten partiellen Differentialquotienten jener Integrale keine algebraische Beziehung stattfindet, einem Integrale der Differentialgleichung*

$$\alpha_1\frac{\partial v}{\partial z_1}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial z_2}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial v}{\partial z_n} = \gamma$$

und den unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine algebraische Beziehung stattfindet, sind unter der Voraussetzung, dass nicht schon zwischen weniger als $m+1$ Integralen dieser $m+1$ partiellen Differentialgleichungen eine algebraische Relation existirt, die folgenden:

$$1)\quad \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \cdots = \frac{a_{m2}}{a_{m1}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{1n}}{a_{11}} = \frac{a_{2n}}{a_{21}} = \cdots = \frac{a_{mn}}{a_{m1}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_1},$$

2) *muss die partielle Differentialgleichung*

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} = 0$$

algebraische Integrale besitzen, von denen wir m beliebige durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ bezeichnen wollen,

3) *muss, wenn*

$$\frac{c_1}{a_{11}}\alpha_1 = \gamma_1, \quad \frac{c_2}{a_{21}}\alpha_1 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \frac{c_m}{a_{m1}}\alpha_1 = \gamma_m$$

gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung

$$\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \Phi}{\partial z_n} = \gamma - \gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_2 - \cdots - \gamma_m\varphi_m$$

ebenfalls algebraisch integrirbar sein, und es werde ein beliebiges algebraisches Integral dieser durch Φ_1 bezeichnet;

dann und nur dann findet eine algebraische Beziehung der Form

$$v = \varphi_1.u_1 + \varphi_2.u_2 + \cdots + \varphi_m.u_m + \Phi_1$$

statt, und diese algebraische Beziehung bleibt erhalten, wenn statt $u_1, u_2, \ldots, u_m$ beliebige andere Integrale des obigen Differentialgleichungssystems gesetzt werden, wenn man nur für v ein passendes Integral der gegebenen Differentialgleichung substituirt.

Wir wollen den eben bewiesenen Satz auf die Zusammenstellung einer beliebigen irreductiblen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und einer partiellen Differentialgleichung irgend welcher höheren Ordnung ausdehnen.

Sei

$$(38.)\quad f\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_n}\right) = 0$$

eine algebraische irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und der abhängigen Variablen u, ferner

$$(39.)\quad F\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, v, \frac{\partial v}{\partial z_1}, \frac{\partial v}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m v}{\partial z_1^m}, \frac{\partial^m v}{\partial z_1^{m-1}\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m v}{\partial z_n^m}\right) = 0$$

eine algebraische partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung, und bestehe zwischen zwei Integralen u_1 und v_1 dieser beiden Differentialgleichungen eine algebraische Beziehung der Form

$$(40.)\quad v_1 = \omega(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1),$$

so geht durch Substitution von (40.) die Differentialgleichung (39.) über in

$$(41.)\quad \Phi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_1^m}, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_1^{m-1}\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_n^m}\right) = 0,$$

worin Φ wiederum eine algebraische Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet. Da nun aus (38.)

$$(42.)\quad \frac{\partial u_1}{\partial z_n} = \varphi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_{n-1}}\right)$$

folgt, sich somit alle partiellen Differentialquotienten von u_1 von der Form

$$\frac{\partial^\varrho u_1}{\partial z_1^{\varrho_1}\partial z_2^{\varrho_2}\ldots\partial z_n^{\varrho_n}} \qquad (\varrho = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_n)$$

algebraisch durch $z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1$ und die partiellen Differentialquotienten von der Form

$$\frac{\partial^\sigma u_1}{\partial z_1^{\sigma_1}\partial z_2^{\sigma_2}\ldots\partial z_{n-1}^{\sigma_{n-1}}} \qquad (\sigma = \sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1})$$

ausdrücken lassen, so wird durch die Substitution dieser Ausdrücke die Gleichung (41.) in

$$(43.)\quad \Psi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_{n-1}}, \ldots, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_1^m}, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_1^{m-1}\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m u_1}{\partial z_{n-1}^m}\right) = 0$$

übergehen, worin Ψ algebraisch aus den eingeschlossenen Grössen zusammengesetzt ist, und es würde daher u_1 ein Integral einer algebraischen partiellen Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit nur $n-1$ unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sein, in welche z_n als Parameter eintritt. Da dies aber vermöge der Irreductibilität der partiellen Differentialgleichung

erster Ordnung (38.) nicht der Fall sein darf, so muss die Differentialgleichung (43.) eine identische sein, und daraus folgt somit unmittelbar, dass, wenn man für u_1 irgend ein anderes Integral u_2 der partiellen Differentialgleichung (38.) setzt und der Relation (40.) gemäss den Ausdruck

$$(41.) \qquad v_2 = \omega(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_2)$$

bildet, v_2 auch ein Integral der partiellen Differentialgleichung (39.) sein wird.

Daraus folgt also,

dass, wenn zwischen zwei Integralen einer algebraischen irreductiblen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und einer algebraischen partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung und den unabhängigen Variablen ein algebraischer Zusammenhang besteht, dieser Zusammenhang erhalten bleibt, wenn für das Integral der irreductiblen Differentialgleichung ein beliebiges Integral derselben, für das Integral der anderen Differentialgleichung ein passendes Integral substituirt wird.

Es mag hervorgehoben werden, dass die Gültigkeit des Satzes bestehen bleibt, wenn man die Voraussetzung der Irreductibilität, welche die angegebene Eigenschaft *aller* Integrale der partiellen Differentialgleichung (38.) in sich schliesst, fallen lässt, aber statt dessen annimmt, dass das specielle Integral u_1 die Eigenschaft habe, nicht einer algebraischen partiellen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung zu genügen, in welche nur $n-1$ der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als unabhängige Variable und die $n$te nur als Parameter eintritt.

Nachdem dies vorausgeschickt, ist leicht zu sehen, dass sich alle die Auseinandersetzungen, welche ich bei Entwickelung des entsprechenden Problems für totale Differentialgleichungssysteme gegeben habe*), unmittelbar auf beliebige partielle Differentialgleichungssysteme übertragen lassen, und dass sich mit Benutzung der für irreductible partielle Differentialgleichungssysteme gültigen Eigenschaften**) der folgende allgemeine Satz aussprechen lässt:

Es seien k algebraische irreductible partielle Differentialgleichungssysteme der $m_1$ten, $m_2$ten, ..., $m_k$ten Klasse in der Form gegeben

---

*) Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 70.

**) S. meine Arbeit „über die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme“, dieses Journal Bd. 111, Heft 1.

$$(45.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G_\varrho}{\partial t_{1\varrho}}\dfrac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_1} = G_{\varrho 1}, \\ \dfrac{\partial G_\varrho}{\partial t_{1\varrho}}\dfrac{\partial u_{\varrho 2}}{\partial z_1} = G_{\varrho 2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial G_\varrho}{\partial t_{1\varrho}}\dfrac{\partial u_{\varrho m_\varrho}}{\partial z_1} = G_{\varrho m_\varrho}, \end{cases} \qquad \text{(für } \varrho = 1, 2, \ldots, k)$$

worin $G_{\varrho 1}, G_{\varrho 2}, \ldots, G_{\varrho m_\varrho}$ *ganze Functionen der Grössen*

$$(\alpha.)\quad z_1, z_2, \ldots, z_n, u_{\varrho 1}, u_{\varrho 2}, \ldots, u_{\varrho m_\varrho}, \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial u_{\varrho m_\varrho}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_{\varrho m_\varrho}}{\partial z_n}$$

und einer Grösse $t_{1\varrho}$ *sind, welche eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen* (α.) *algebraisch irreductiblen Gleichung*

$$(46.)\quad \begin{cases} G\Big(z_1, z_2, \ldots, z_n, u_{\varrho 1}, u_{\varrho 2}, \ldots, u_{\varrho m_\varrho}, \dfrac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_2}, \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u_{\varrho 1}}{\partial z_n}, \ldots, \dfrac{\partial u_{\varrho m_\varrho}}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_{\varrho m_\varrho}}{\partial z_n}, t_\varrho\Big) = 0 \end{cases}$$

ist, und mögen zwischen k Integralsystemen dieser k Differentialgleichungssysteme

$$(\text{a.})\quad \begin{cases} \bar{u}_{11}, & \bar{u}_{12}, & \ldots, & \bar{u}_{1m_1}, \\ \bar{u}_{21}, & \bar{u}_{22}, & \ldots, & \bar{u}_{2m_2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{u}_{k1}, & \bar{u}_{k2}, & \ldots, & \bar{u}_{km_k} \end{cases}$$

und deren nach $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *genommenen partiellen Differentialquotienten beliebiger Ordnung — unter welchen Grössen selbst algebraische Beziehungen nicht stattfinden sollen*) — und einem Integralsysteme*

$$(\text{b.})\quad \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$$

eines beliebigen irreductiblen oder reductiblen (auch in gesonderte Systeme zerfallenden) Systems partieller Differentialgleichungen

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} = g_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial g}{\partial \tau_1}\dfrac{\partial v_m}{\partial z_1} = g_m, \end{cases}$$

---

*) Die Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichungssysteme schliesst eine derartige algebraische Beziehung für die Integralelemente *eines* solchen Differentialgleichungssystems schon von selbst aus.

worin $g_1, g_2, \ldots, g_m$ *ganze Functionen der Grössen*

$$(\beta.)\quad z_1, z_2, \ldots, z_n, v_1, v_2, \ldots, v_m, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial z_n}$$

und einer Grösse τ_1 *sind, welche eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen* (β.) *algebraisch irreductiblen Gleichung*

$$(48.)\quad g\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, v_1, v_2, \ldots, v_m, \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial z_n}, \tau\right) = 0$$

ist, ν *und nur* ν, *worin* $\nu \leqq m$, *algebraische Beziehungen von der Form statthaben*

$$(49.)\quad \begin{cases} \varphi_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_\nu\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m\right) = 0, \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ *ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten und* $\bar{u}$ *der Kürze halber die Gesammtheit der Integralsysteme* (a.) *darstellen soll — dann bleiben diese Beziehungen* (49.) *erhalten, wenn man statt* $\bar{u}$ *willkürliche andere Integralsysteme*

$$(\text{c.})\quad \begin{cases} \bar{u}'_{11}, \bar{u}'_{12}, \ldots, \bar{u}'_{1m_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{u}'_{k1}, \bar{u}'_{k2}, \ldots, \bar{u}'_{km_k} \end{cases}$$

der Differentialgleichungen (45.) *einsetzt, vorausgesetzt, dass man nur statt des Integralsystemes* (b.) *ein oder auch verschiedene passende Integralsysteme der Differentialgleichungen* (47.) *substituirt.*

Um die zu einem beliebig gewählten Systeme der $\bar{u}$ zugehörigen $\bar{v}$ zu finden, verfahre man folgendermassen:

Man stelle aus den Gleichungen (49.) und (48.) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_\nu$ und $\bar{\tau}_1$ als Lösungen algebraischer, mit Adjungirung von $z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, t, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m$ irreductibler

Gleichungen

$$(50.)\quad\begin{cases} \mathfrak{g}_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{v}_1\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{g}_\nu\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{v}_\nu\right) = 0 \end{cases}$$

$$(51.)\quad\begin{cases} \mathfrak{g}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{\tau}_1\right) = 0 \end{cases}$$

dar und bestimme eine Grösse $\bar{T}_1$ als Lösung einer mit Adjungirung von $z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m$ irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(52.)\quad\begin{cases} F\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, T\right) = 0 \end{cases}$$

derart, dass sich $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_\nu$ und $\bar{\tau}_1$ rational durch $\bar{T}_1$ und die übrigen Grössen in der Form

$$(53.)\quad\begin{cases} \bar{v}_1 = R_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{T}_1\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{v}_\nu = R_\nu\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{T}_1\right), \end{cases}$$

$$(54.)\quad\begin{cases} \bar{\tau}_1 = R\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \ldots,\right. \\ \qquad \left.\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \ldots, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \ldots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \ldots, \bar{v}_m, \bar{T}_1\right), \end{cases}$$

ausdrücken lassen*), setzt diese Werthe von $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\nu, \bar{\tau}_1$ für $v_1, \dots, v_\nu, \tau_1$ in die $m-\nu$ letzten Differentialgleichungen des Systems (47.) ein, so dass sich, wenn $\varrho_1, \dots, \varrho_{m-\nu}$ rationale Functionen bedeuten,

$$(55.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}_{\nu+1}}{\partial z_1} = \varrho_1\Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{u}, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \dots, \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \dots, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \dots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \dots, \bar{v}_m, \dfrac{\partial \bar{v}_{\nu+1}}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_{\nu+1}}{\partial z_n}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_m}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_m}{\partial z_n}, \bar{T}_1\Big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \bar{v}_m}{\partial z_1} = \varrho_{m-\nu}\Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{u}, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z_n}, \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2^2}, \dots, \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_2 \partial z_n}, \dots, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z_n^2}, \dots, \bar{t}, \bar{v}_{\nu+1}, \dots, \bar{v}_m, \dfrac{\partial \bar{v}_{\nu+1}}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_{\nu+1}}{\partial z_n}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_m}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{v}_m}{\partial z_n}, \bar{T}_1\Big) \end{cases}$$

ergiebt, so werden, wenn man für $\bar{u}$ und die zugehörigen $\bar{t}$ willkürliche Integralsysteme $\bar{u}'$ und $\bar{t}'$ der Differentialgleichungen (45.), (46.) setzt, ferner ***irgend ein*** Integralsystem

$$\bar{v}'_{\nu+1},\ \bar{v}'_{\nu+2},\ \dots,\ \bar{v}'_m$$

der Differentialgleichungen (55.) bei willkürlicher Festsetzung des Zweiges der Wurzel $\bar{T}_1$ der Gleichung

$$F\Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{u}', \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z_n}, \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2 \partial z_n}, \dots, \\ \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_n^2}, \dots, \bar{t}', \bar{v}'_{\nu+1}, \dots, \bar{v}'_m, \bar{T}\Big) = 0$$

wählt, die aus den den Gleichungen (53.) analogen Formen

$$(56.)\quad \begin{cases} \bar{v}'_1 = R_1\Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{u}', \dfrac{\partial \bar{u}'}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{u}'}{\partial z_n}, \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2^2}, \dots, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2 \partial z_n}, \dots, \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_n^2}, \dots, \bar{t}', \bar{v}'_{\nu+1}, \dots, \bar{v}'_m, \bar{T}_1\Big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{v}'_\nu = R_\nu\Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{u}', \dfrac{\partial \bar{u}'}{\partial z_2}, \dots, \dfrac{\partial \bar{u}'}{\partial z_n}, \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2^2}, \dots, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_2 \partial z_n}, \dots, \dfrac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z_n^2}, \dots, \bar{t}', \bar{v}'_{\nu+1}, \dots, \bar{v}'_m, \bar{T}_1\Big) \end{cases}$$

hervorgehenden Werthe von $\bar{v}'_1, \dots, \bar{v}'_\nu$ zusammen mit $\bar{v}'_{\nu+1}, \dots, \bar{v}'_m$ dasjenige Integralsystem der Gleichungen (47.), (48.) bilden, welches für Substituirung jenes willkürlichen Integralsystems der u gesetzt werden muss, damit die gegebenen algebraischen Relationen (49.) erhalten bleiben.

*) Vgl. den zweiten Abschnitt des ersten Capitels meines Lehrbuches der Theorie der Differentialgleichungen.

Zur Auflösung der lemniskatischen Theilungsgleichungen.

(Von Herrn *K. Schwering* in Düren.)

Eine Gleichung höheren Grades gilt als algebraisch gelöst, wenn eine Potenz ihrer *Lagrange*schen Resolvente durch die Coefficienten der Gleichung oder in irgend einer anderen Weise durch gegebene Grössen dargestellt ist. Ein klassisches Vorbild und Beispiel dieser Lösung ist die *Jacobi*sche Kreistheilung. Es ist das Verdienst *Kroneckers*, in seiner berühmten Abhandlung (der Berliner Akademie vorgelegt von *Lejeune Dirichlet* am 20. Juni 1853) für die Lösung der allgemeinen *Abel*schen Gleichungen den analogen Weg gezeigt zu haben. Zugleich ergab sich, dass die Wurzel jeder *Abel*schen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten als rationale Function von Einheitswurzeln dargestellt werden kann. Diese bedeutsame Entdeckung hat *Kronecker* später in seinen Vorlesungen und in verschiedenen Aufsätzen über die Composition der *Abel*schen Gleichungen dem Verständnisse weiterer Kreise zugeführt und durch die Beziehung zu den singulären Moduln in bewunderungswürdiger Weise vertieft. Ich erwähne hier die Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctorjubiläum und die kleinen Mittheilungen vom 7. und 21. December 1882. Schon in der von mir an erster Stelle genannten Abhandlung erwähnt *Kronecker* diejenigen Gleichungen, von denen die Theilung der Lemniskate abhängt, und sagt, dass sie für die *Abel*schen Gleichungen mit complexen Coefficienten „$a+bi$“ eine ähnliche Rolle spielen wie die Kreistheilungsgleichungen für *Abel*sche Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. Es ist daher kein Zweifel, dass die Theorie der Lemniskatentheilung gerade unter dem Gesichtspunkte der *Lagrange*schen Resolventen von hervorragendem Interesse ist. Bisher stand aber dieser Untersuchung besonders der Umstand entgegen, dass die Bildung dieser Resolventen theoretisch sehr einfach, praktisch aber geradezu unausführbar erschien. Während in der Kreistheilung die Beziehung der Wurzeln zu

einander die denkbar einfachste ist, waren analog einfachere Beziehungen in der Lemniskatentheilung nicht bekannt. Die Auffindung und Erläuterung solcher Beziehungen ist ein Hauptergebniss vorliegender Abhandlung. Dabei ergaben sich zugleich sehr merkwürdige Zahlendreiheiten, welche, ganz abgesehen von der Lemniskatentheilung, Beachtung verdienen. Für die Resolventen selbst ist es mir einerseits gelungen, nach *Kummer*schen Methoden einen gewissen, stets auftretenden complexen Factor auszuscheiden, andererseits die Berechnung einer gewissen cyklischen Function durch eine besondere Art von Kettenbruchentwickelung zu vollbringen. Auch die Berechnung der Discriminante der Theilungsgleichungen gelang. Endlich zeigte sich, dass ausser dem Producte $(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x)$, besonders für $q = 8m+1$, das Product $(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x^{-1})$ von entscheidender Bedeutung ist und nach einfachen Methoden berechnet werden kann.

§ 1.

Theilung durch $(1+i)^n$.

Die Multiplication der lemniskatischen Functionen mit Potenzen von $1+i$ gelingt nach dem von mir (dieses Journal, Bd. 107, S. 232) angegebenen Verfahren mit Hülfe nachstehender Formeln:

$$(1.)\quad \begin{cases} \operatorname{sinam}(1+i)u = \dfrac{(1+i)x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \operatorname{sinam}(1+i)^2 u = \dfrac{(1+i)^2 x}{1+x^4}\sqrt{1-x^4}, \\ \operatorname{sinam}(1+i)^n u = (1+i)^n \dfrac{\Phi_2(x^4).\Phi_3(x^4)\dots\Phi_{n-1}(x^4)}{\Phi_n(x^4)}\, x\sqrt{1-x^4}. \end{cases}$$

Hier bedeutet:

$$(2.)\quad \begin{cases} \quad x = \operatorname{sinam} u, \quad \Phi_1(x^4) = \sqrt{1-x^4}, \quad \Phi_2(x^4) = 1+x^4, \\ \Phi_3(x^4) = 1-6x^4+x^8, \\ \Phi_4(x^4) = 1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}, \\ \Phi_5(x^4) = 1-88x^4+92x^8-872x^{12}+1990x^{16}-872x^{20}+92x^{24}-88x^{28}+x^{32}. \end{cases}$$

Die einzelnen Φ gehen aus einander hervor durch die Gleichung:

$$(3.)\qquad \Phi_{m+1}(x^4) = (1-x^4)^{2^{m-1}}.\Phi_m\left(\frac{-4x^4}{(1-x^4)^2}\right).$$

Auch kann man für dieselben die Gleichung beweisen:

$$(4.)\qquad \Phi_{m+2}(x^4) = 2\Phi_m^4(x^4)-\Phi_{m+1}^2(x^4).$$

Am einfachsten gelingt der Beweis durch vollständige Induction. Man

ersetze x^4 durch $\frac{-4x^4}{(1-x^4)^2}$, so vermehren sich die Indices m, $m+1$, $m+2$ jeder um eine Einheit. Für $m=1$ ist aber (4.) richtig:

$$1-6x^4+x^8 = 2(\sqrt{1-x^4})^4-(1+x^4)^2.$$

Aus (4.) kann man, wenn beiderseits $\Phi^2_{m+1}(x^4)$ subtrahirt wird, eine merkwürdige Gleichung für den Ausdruck $\Phi^2_{m+2}-\Phi_{m+1}$ gewinnen. Durch (4.) kann man auch Φ mit den Indices 0, -1, -2, ... erhalten. Es wird

$$\Phi_0 = 1,\quad \Phi_{-1} = \sqrt[4]{\frac{x^4}{2(1-\sqrt{1-x^4})}},\quad \text{u. s. w.}$$

Der Coefficient von x^4 in $\Phi_m(x^4)$ ist:

$$-2^{m-2}.\frac{1+(-1)^{m+1}.2^m}{3}.$$

Die Theilung der Periode durch $(1+i)^n$ verlangt, wie (1.) ersichtlich macht, die Lösung der Gleichung $\Phi_n(x^4) = 0$.

Diese Gleichung ist ***nicht irreductibel.*** Wie wir oben gesehen haben, gehen die Theilungsgleichungen, jede aus der vorhergehenden, dadurch hervor, dass x^4 durch $-\frac{4x^4}{(1-x^4)^2}$ ersetzt und dann der Nenner fortgeschafft wird. Nun ist dies aber dasselbe, als wenn man x^2 durch $\frac{2ix^2}{1-x^4}$ ersetzt; und da Φ_2 zerfällt, indem

$$\Phi_2(x^4) = (x^2+i)(x^2-i)$$

ist, so zerfallen auch die folgenden Φ. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Jede Function $\Phi_m(x^4)$ zerfällt in zwei Factoren:

$$\Phi_m(x^4) = f_m(x^2).f_m(-x^2),$$

von denen die eine aus $i+x^2$, die andere aus $i-x^2$ hervorgeht, indem man wiederholt x^2 durch $\frac{2ix^2}{1-x^4}$ ersetzt und jedesmal die Nenner fortschafft. So ist:

$$\Phi_3(x^4) = (x^4-2x^2-1)(x^4+2x^2-1) = x^8-6x^4+1,$$

$$\Phi_4(x^4) = (x^8-4ix^6+2x^4+4ix^2+1)(x^8+4ix^6+2x^4-4ix^2+1).$$

Um die Lösung dieser Gleichungen zu ermitteln, wollen wir die Beziehungen ihrer Wurzeln zur Periodentheilung darlegen und dabei schrittweise verfahren.

Es ist $\sin\text{am} K = 1$. Suchen wir $\sin\text{am}\frac{K}{1+i}$ zu bestimmen. Setzen

wir $x = \sin\mathrm{am}\frac{K}{1+i}$, so ist nach (1.) (erste Formel)

$$1 = \frac{(1+i)x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Daher die doppelte Wurzel $x^2+i=0$, also

$$\sin\mathrm{am}\frac{K}{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Zur Entscheidung führt das Additionstheorem. Es ist

$$\sin\mathrm{am}\frac{K}{1+i} = \sin\mathrm{am}\left(\frac{K}{2}-i\frac{K}{2}\right);$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{K}{2},\quad \cos\mathrm{am}\frac{K}{2},\quad \Delta\mathrm{am}\frac{K}{2} \quad \text{sind positiv;}$$

also ist eindeutig

$$\sin\mathrm{am}\frac{K}{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}};\quad \sqrt{2} = 1,414\ \ldots.$$

Dies ist die lemniskatische Auflösung der Gleichung $x^2+i=0$. Ersetzen wir x durch xi, so erhalten wir $x^2-i=0$. Also:

Die Wurzeln der Gleichung $x^4+1=0$ sind $x = \sin\mathrm{am}\,v$, wenn

$$v = \frac{K}{1+i},\quad -\frac{K}{1+i},\quad \frac{Ki}{1+i},\quad -\frac{Ki}{1+i}.$$

Schreiten wir zum folgenden Falle. Ersetzen wir in $x^2+i=0$ die Unbekannte x^2 durch $\frac{2ix^2}{1-x^4}$, so erhalten wir

$$(5.)\qquad x^4-2x^2-1 = 0.$$

Wie die *Entstehung* derselben beweist, ist eine Wurzel derselben $\sin\mathrm{am}\frac{K}{2i}$; wie ihre *Form* zeigt, ist neben x auch immer $-\frac{i}{x}$ als Wurzel vorhanden. Da nun (s. d. Abh. Bd. 107, S. 199)

$$\sin\mathrm{am}(u).\sin\mathrm{am}(u+K+Ki) = -i$$

ist, so ist auch $\sin\mathrm{am}\left(\frac{K}{2i}+K+Ki\right)$ eine Wurzel von (5.). Die Wurzeln von $\Phi_3(x^4)$ sind also $\sin\mathrm{am}\,v$, wenn

$$v = \frac{K}{2i},\quad \frac{K}{2i}+K+Ki$$

genommen wird. Ausserdem darf man die Argumente mit den Potenzen von i multipliciren.

Im folgenden Falle entsteht aus (5.) die Gleichung

$$(6.)\qquad x^8-4ix^6+2x^4+4ix^2+1 \;=\; 0.$$

Wie ihre *Entstehung* beweist, sind zwei ihrer Wurzeln $\sin\operatorname{am} v$, wenn

$$v_1 = \frac{K}{(1+i)^3}, \quad v_3 = \frac{K}{(1+i)^3}+K;$$

(durch Division aus den vorhergehenden abgeleitet); wie ihre *Form* zeigt, kommen hinzu

$$v_2 = \frac{K}{(1+i)^3}+K+Ki; \quad v_4 = v_3+K+Ki.$$

Multipliciren wir alle vier mit den Potenzen von i, so haben wir die 16 Wurzeln der Gleichung $\Phi_4(x^4) = 0$.

Indem wir in derselben Weise weiter schliessen, finden wir:

Die Gleichung $\Phi_{m+1}(x^4) = 0$ *hat die Wurzeln*

$$x \;=\; \sin\operatorname{am}(v_n),$$

wo

$$v_n \;=\; \frac{K}{(1+i)^m}+n_1\frac{K}{(1+i)^{m-3}}+n_2\frac{K}{(1+i)^{m-4}}+\cdots+n_t.K,$$
$$n_1,\quad n_2,\quad \ldots,\quad n_t = 0 \quad \text{oder} \quad = 1;$$

ausserdem sind zulässig v_n+K+Ki, *und endlich ist es gestattet, die so entstehenden Argumente mit den Potenzen von* i *zu multipliciren.* Die Anzahl der n_r ist $m-2$, die ihrer Werthverbindungen also 2^{m-2}; durch den Zusatz $K+Ki$ wird diese Zahl verdoppelt, also 2^{m-1}, durch die Multiplication mit Potenzen von i diese vervierfacht, also 2^{m+1}. Und das ist der Grad von $\Phi_{m+1}(x^4)$.

Wollen wir nun eine Methode, welche die Auflösung sofort liefert und den Charakter des Ergebnisses zugleich klar zu erkennen giebt, so beweisen wir die Gleichung:

$$(7.)\qquad \sin^2\operatorname{am} u \;=\; -\frac{i}{\sin^2\operatorname{am}(1+i)u}+\frac{-1+i}{\sin\operatorname{am}(1+i)u.\sin\operatorname{am}(2i.u)}.$$

Die Richtigkeit derselben erhellt aus den Gleichungen (1.) sofort:

$$x^2 \;=\; -i\frac{1-x^4}{2ix^2}+(-1+i)\frac{1+x^4}{(-2+2i)x^2}.$$

Setzen wir in (7.) $u = \frac{K}{(1+i)^2}$, so wird $\sin^2\operatorname{am}\frac{K}{2i} = 1-\sqrt{2}$, dagegen folgt

$\sin^2 \mathrm{am}\, u = 1+\sqrt{2}$ für $u = \frac{K}{2i}+K+Ki$. So erhält man:

$$\sin\mathrm{am}\frac{K}{2} = \sqrt{\sqrt{2}-1}, \quad \sin\mathrm{am}\left(\frac{K}{2i}+K+Ki\right) = \sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

§ 2.

Theilung der Periode durch eine (complexe) Primzahl. . Vorbereitung.

Für die lemniskatischen Functionen besteht folgende Multiplicationsgleichung:

$$(8.) \qquad \sin\mathrm{am}(\tau u) = \frac{\sin\mathrm{am}(\varrho u)+i\sin\mathrm{am}(\sigma u)}{i\sin\mathrm{am}(\varrho u)+\sin\mathrm{am}(\sigma u)}\cdot\sin\mathrm{am}\, u,$$

wenn gesetzt wird:

$$\tau = 1+4k+4k'i, \quad \varrho = \frac{1+\tau i}{1+i}, \quad \sigma = \frac{\tau+i}{1+i}.$$

Man beweist dieselbe wie folgt. Ersetzt man u durch $(1+i)v$, so geht sie über in

$$\sin\mathrm{am}\,\tau(1+i)v = \frac{\sin\mathrm{am}(1+\tau i)v+i\sin\mathrm{am}(i+\tau)v}{i\sin\mathrm{am}(1+\tau i)v+\sin\mathrm{am}(i+\tau)v}\cdot\sin\mathrm{am}(1+i)v.$$

Entwickelt man nun nach dem Additionstheorem mit Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\sin\mathrm{am}(ui) = i\sin\mathrm{am}\, u;$$

$$\sin\mathrm{am}(u+v) = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2};$$

$$\text{für } x = \sin\mathrm{am}\, u, \quad y = \sin\mathrm{am}\, v,$$

so geht sie in eine Identität über.

Nehmen wir nun an, η sei eine Primzahl mit der Norm q, G sei eine primitive Wurzel (mod. η), so dass

$$G^{\frac{q-1}{4}} \equiv i \pmod{\eta},$$

endlich δ_m eine Wurzel der Theilungsgleichung. Dann kann man setzen:

$$\delta_m = \sin\mathrm{am}\,\frac{4G^m HK}{\eta}.$$

Die Hinzufügung der ganzen complexen Zahl H ist nothwendig, um den Uebergang der verschiedenen Wurzeln der Theilungsgleichung in einander ausführen zu können. Allein diese blosse Erinnerung mag auch genügen, und wir werden uns der Kürze wegen gestatten, im allgemeinen den Mul-

tiplicator H wegzulassen. Wir schreiben also auch

$$\delta_m = \sin\mathrm{am}\frac{4G^m.K}{\eta}, \quad \delta_{\mathrm{ind}\tau} = \sin\mathrm{am}\frac{4\tau K}{\eta}.$$

Es liefert nun (8.) die Beziehung:

$$(9.) \qquad \frac{\delta_{\mathrm{ind}\tau}}{\delta_0} = \frac{\delta_{\mathrm{ind}\varrho}+i\delta_{\mathrm{ind}\sigma}}{i\delta_{\mathrm{ind}\varrho}+\delta_{\mathrm{ind}\sigma}}.$$

Diese Gleichung ist die einfachste Beziehung, welche zwischen den Wurzeln der Theilungsgleichung besteht. Sie entspricht der Kreistheilungsbeziehung $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$. Während aber hier *drei* Wurzeln mit einander verknüpft werden, sind *vier* lemniskatische Wurzeln

$$\delta_0, \quad \delta_{\mathrm{ind}\tau}, \quad \delta_{\mathrm{ind}\varrho}, \quad \delta_{\mathrm{ind}\sigma}$$

durch (9.) mit einander in Zusammenhang. Da wir oben bemerkt haben, dass im Argumente die Multiplication mit einer ganzen Zahl H erforderlich ist, deren Index h sein mag, so ist klar, dass die Beziehung (9.) richtig bleibt, wenn wir alle Indices der δ gleichzeitig um eine beliebige ganze Zahl vermehren, also:

$$(9^a.) \qquad \frac{\delta_{h+\mathrm{ind}\tau}}{\delta_h} = \frac{\delta_{h+\mathrm{ind}\varrho}+i\delta_{h+\mathrm{ind}\sigma}}{i\delta_{h+\mathrm{ind}\varrho}+\delta_{h+\mathrm{ind}\sigma}}.$$

So treten die verschiedenen Wurzeln δ in Gruppen von je *vier* auf, und wir müssen die Frage nach der Anzahl der wahrhaft verschiedenen Gruppen jetzt beantworten. Die Antwort wird ertheilt durch die nachstehende Untersuchung.

§ 3.

Anordnung der Wurzeln der Theilungsgleichung nach viergliedrigen Gruppen. Discriminante dieser Gleichung.

Wir haben für τ die bestimmte Form $1+4k+4k'i$ gewählt. Unser Beweis nahm auf diese Form keine Rücksicht. Dieselbe braucht also auch nicht vorausgesetzt zu werden, und wir haben sie nur deshalb ertheilt, weil wir so für ϱ und σ *primäre* complexe Zahlen gewinnen. Jetzt lassen wir diese Annahme fallen und nehmen nur an, dass ϱ und σ *ganze* Zahlen sind. Dazu sind wir nicht bloss berechtigt, wenn τ *ungerade* ist; denn für ein *gerades* τ brauchen wir nur $\tau+q$ zu setzen, um es in ein gleichwerthiges ungerades zu verwandeln.

Lassen wir τ die Werthe 1, 2, 3, ..., $q-1$ durchlaufen, so durchlaufen mod.q auch ϱ und σ arithmetische Reihen und bilden vollständige Restsysteme. So wird für $\eta = 3+2i$, $q = 13$:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \tau = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12; \\ \varrho = & 1, & 4, & 7, & 10, & 0, & 3, & 6, & 9, & 12, & 2, & 5, & 8; \\ \sigma = & 1, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 0, & 11, & 9, & 7, & 5. \end{array}$$

Unbrauchbar sind, wie wir sehen werden, die Dreiheiten 1, 1, 1; 5, 0, 6; 8, 9, 0. Für die übrigen erhält man:

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{ind}\tau = & 7, & 4, & 2, & 11, & 5, & 8, & 10, & 1; \\ \mathrm{ind}\varrho = & 2, & 5, & 10, & 4, & 11, & 6, & 7, & 3; \\ \mathrm{ind}\sigma = & 6, & 10, & 9, & 2, & 7, & 1, & 8, & 5. \end{array}$$

Diese Dreiheiten (die senkrecht unter einander stehenden gehören zusammen) führen alle zu derselben Gleichung unter den δ, wie man leicht sieht und sich später allgemein zeigen wird. Das Zahlenbeispiel lässt erkennen, wie leicht man — fast ohne Rechnung — auch für grosse Zahlen q die zusammengehörenden Dreiheiten τ, ϱ, σ niederschreiben kann.

Um die wesentlich verschiedenen Dreiheiten auszusondern, beachten wir, dass Gleichung (9.) auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$1)\quad \frac{\delta_{\mathrm{ind}\tau}}{\delta_0} = \frac{\delta_{\mathrm{ind}\varrho}+i\delta_{\mathrm{ind}\sigma}}{i\delta_{\mathrm{ind}\varrho}+\delta_{\mathrm{ind}\sigma}}; \qquad 2)\quad \frac{\delta_0}{\delta_{\mathrm{ind}\tau}} = \frac{\delta_{\mathrm{ind}\sigma}+i\delta_{\mathrm{ind}\varrho}}{i\delta_{\mathrm{ind}\sigma}+\delta_{\mathrm{ind}\varrho}};$$

$$3)\quad \frac{\delta_{\mathrm{ind}\varrho}}{\delta_{\mathrm{ind}\sigma}} = \frac{\delta_0+i\delta_{\mathrm{ind}\tau}}{i\delta_0+\delta_{\mathrm{ind}\tau}}; \qquad 4)\quad \frac{\delta_{\mathrm{ind}\sigma}}{\delta_{\mathrm{ind}\varrho}} = \frac{\delta_{\mathrm{ind}\tau}+i\delta_0}{i\delta_{\mathrm{ind}\tau}+\delta_0}.$$

Hieraus folgen die vier zusammengehörenden, d. h. zu derselben Gleichung führenden Dreiheiten:

$$\begin{array}{llll} 1) & \mathrm{ind}\tau, & \mathrm{ind}\varrho, & \mathrm{ind}\sigma; \\ 2) & q-1-\mathrm{ind}\tau, & \mathrm{ind}\sigma-\mathrm{ind}\tau, & \mathrm{ind}\varrho-\mathrm{ind}\tau; \\ 3) & \mathrm{ind}\varrho-\mathrm{ind}\sigma, & q-1-\mathrm{ind}\sigma, & \mathrm{ind}\tau-\mathrm{ind}\sigma; \\ 4) & \mathrm{ind}\sigma-\mathrm{ind}\varrho, & \mathrm{ind}\tau-\mathrm{ind}\varrho, & q-1-\mathrm{ind}\varrho. \end{array}$$

Da ind$h$ sich mod.$(q-1)$ versteht, so ist negativen Werthen $q-1$ hinzuzufügen. Ferner ist

$$\varrho i = \frac{-\tau+i}{1+i}, \quad -\sigma i = \frac{1-\tau i}{1+i}.$$

Geht also τ in $-\tau$ über, so verwandelt sich ϱ in $-\sigma i$ und σ in ϱi. Hiermit ist eine neue Vertauschung gewonnen, und so erhalten wir noch die

folgenden Dreiheiten aus den vorigen:

$$\mu = \frac{q-1}{4},$$

5)	$\operatorname{ind}\tau+2\mu,$	$\operatorname{ind}\sigma-\mu,$	$\operatorname{ind}\varrho+\mu;$
6)	$2\mu-\operatorname{ind}\tau,$	$\operatorname{ind}\varrho-\operatorname{ind}\tau+3\mu,$	$\operatorname{ind}\sigma-\operatorname{ind}\tau+\mu;$
7)	$\operatorname{ind}\sigma-\operatorname{ind}\varrho+2\mu,$	$3\mu-\operatorname{ind}\varrho,$	$\operatorname{ind}\tau-\operatorname{ind}\varrho+\mu;$
8)	$\operatorname{ind}\varrho-\operatorname{ind}\sigma+2\mu,$	$\operatorname{ind}\tau-\operatorname{ind}\sigma-\mu,$	$\mu-\operatorname{ind}\sigma.$

Die acht Dreiheiten unseres Beispiels sind also alle zusammengehörig und entsprechen den obigen acht Angaben wie folgt:

7, 2, 6; 5, 11, 7; 8, 6, 1; 4, 5, 10; 1, 3, 5; 11, 4, 2;
10, 7, 8; 2, 10, 9.

Es fragt sich nun, ob die obigen acht Angaben ***stets*** acht verschiedene Dreiheiten liefern. Für ***gleiche*** τ erhält man immer gleiche ϱ und σ. Es fragt sich also, ob die durch unsere acht Angaben gelieferten Werthe von τ übereinstimmen können oder nicht. Die in den acht Angaben enthaltenen Werthe der τ sind aber:

$$1)\ \tau;\quad 2)\ \frac{1}{\tau};\quad 3)\ \frac{1+\tau i}{\tau+i};\quad 4)\ \frac{\tau+i}{1+\tau i};$$
$$5)\ -\tau;\quad 6)\ -\frac{1}{\tau};\quad 7)\ -\frac{\tau+i}{1+\tau i};\quad 8)\ -\frac{1+\tau i}{\tau+i}.$$

Bringt man 1) mit 2) in Congruenz, so folgt $\tau^2 \equiv 1\ (\text{mod.}\,q)$, also $\tau \equiv \pm 1$; dies ist unmöglich, weil nichtssagend, nämlich:

$$\delta_{\operatorname{ind}\tau} : \delta_0 = \pm 1.$$

Auch die übrigen Werthe für τ, mit dem ersten in Congruenz gesetzt, liefern nichtssagende Ergebnisse, nämlich $\tau = 0$ oder $\tau = \pm i$. Nur 1) mit 8) in Congruenz gebracht liefert:

$$(\tau+i)^2 \equiv -2\ (\text{mod.}\,\eta).$$

Diese Congruenz liefert nur dann ein verwerthbares Ergebniss, wenn -2 ***quadratischer Rest*** (mod.η) ist. Wie bekannt ist dies für $q = 8m+1$ der Fall, nicht für $q = 8m+5$. Ist also $q = 8m+1$, so erhalten wir Uebereinstimmung für ein gewisses aus obiger Congruenz zu entnehmendes τ zwischen den Angaben 1) und 8), 2) und 7) u. s. w.

Wir erhalten also folgendes Endergebniss:

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., $q-1$ ***lassen sich in Dreiheiten anordnen***, τ, ϱ, σ. ***Die beiden letzteren gehen aus der ersten*** τ ***eindeutig hervor.*** τ ***darf***

nicht $\equiv \pm 1$ *und nicht* $\equiv \pm i$ *(mod.* η*) sein. Ist* $q = 8m+5$, *so erhalten wir m Gruppen von je acht Dreiheiten. Ist* $q = 8m+1$, *so erhalten wir auch m Gruppen, aber eine derselben enthält nur vier, die übrigen* $m-1$ *enthalten je acht Dreiheiten.*

Es ist nun die Frage, ob dementsprechend auch $E\left(\frac{q}{8}\right)$ *Gleichungen* unter den δ vorhanden sind, d. h. ob *verschiedenen* Gruppen angehörende Dreiheiten auch zu *verschiedenen* Gleichungen unter den δ führen. Hierbei kann das Wort „verschieden" nur in einem besonderen Sinne Geltung haben. Denn eine jede Gleichung zwischen den δ führt durch Vergrösserung der Indices um je eine Einheit zu soviel Gleichungen, als verschiedene δ da sind. Die Elimination muss auf die Theilungsgleichung, deren Wurzeln die δ sind, führen. Also kann es im vollen Sinne des Wortes nicht zwei wesentlich verschiedene Gleichungen unter beliebig vielen der Wurzeln δ geben. Wir verstehen also unter *verschiedenen* Gleichungen solche, die zwar die Form (9.) beide besitzen, aber nicht durch lineare Umbildung und Verschiebung der Indices in einander übergehen. Nun zeigt aber (9.), dass als Quotienten nur $\delta_{\text{ind}\,\tau} : \delta_0$; $\delta_{\text{ind}\,\varrho} : \delta_{\text{ind}\,\tau}$; $\delta_{\text{ind}\,\sigma} : \delta_{\text{ind}\,\tau}$; $\delta_{\text{ind}\,\varrho} : \delta_{\text{ind}\,\sigma}$ und die ihnen reciproken auftreten können. Also werden durch unsere acht Angaben alle Umformungen erreicht, welche aus einer Dreiheit τ, ϱ, σ entspringen können. Gehören also zwei Dreiheiten nicht einer Gruppe an, so führen sie zu zwei im obigen Sinne verschiedenen Gleichungen zwischen den δ.

Wenn wir τ alle Werthe 2, 3, 4, ..., $q-1$ durchlaufen lassen, so werden wir nicht darauf rechnen können, im ersten Achtel alle verschiedenen Gruppen anzutreffen. Dies ist zwar praktisch nicht gerade ein grosser Nachtheil; aber man kann theoretisch mit vollem Recht ein Verfahren fordern, welches nur solche τ liefert, die verschiedenen Gruppen angehören.

Dieser Forderung kommen wir durch ein eigenthümliches Verfahren nach. Dasselbe beruht auf einem Gedanken, den zuerst *Schoenemann* (dieses Journal Bd. 19) zu einem anderen Zwecke verwendet hat.

Die Function

$$\operatorname{Tang}\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}$$

hat das Additionstheorem

$$\operatorname{Tang}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{Tang}\varphi+\operatorname{Tang}\psi}{1+\operatorname{Tang}\varphi.\operatorname{Tang}\psi}.$$

Ersetzen wir nun $\operatorname{Tang}\varphi$ durch eine ganze Zahl und bilden mit Hülfe des

Additionstheorems (mod. q) die Reihe:

$$m_1 \equiv \text{Tang}\,\varphi, \quad m_2 \equiv \text{Tang}(2\varphi), \quad m_3 \equiv \text{Tang}(3\varphi), \quad \ldots, \quad (\text{mod.}\,q),$$

wo m_1, m_2, m_3, ... ganze positive Zahlen $< q$ sind, so muss eine Wiederkehr stattfinden. In der That ist:

$$\text{Tang}(q\varphi) = \frac{e^{q\varphi}-e^{-q\varphi}}{e^{q\varphi}+e^{-q\varphi}} \equiv \frac{(1+m_1)^q-(1-m_1)^q}{(1+m_1)^q+(1-m_1)^q} \quad (\text{mod.}\,q),$$

also, da $m_1^q \equiv m_1$ ist,

$$\text{Tang}(q\varphi) \equiv \text{Tang}\,\varphi \ (\text{mod.}\,q).$$

Setzen wir nun $q\varphi = (q-1)\varphi + \varphi$, so folgt mit Hülfe des Additionstheorems

$$\text{Tang}(q-1)\varphi \equiv 0 \ (\text{mod.}\,q).$$

Also:

$$\frac{2\,\text{Tang}\frac{q-1}{2}\varphi}{1+\text{Tang}^2\frac{q-1}{2}\varphi} = \text{Tang}(q-1)\varphi \equiv 0 \ (\text{mod.}\,q),$$

oder es muss sein:

$$\text{Tang}\frac{q-1}{2}\varphi \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv \infty \ (\text{mod.}\,q).$$

Wäre das Erstere zutreffend, so würde schon nach dem $\frac{q-1}{2}$ten Gliede eine Wiederkehr der Werthe stattfinden. Ist aber $\text{Tang}\frac{q-1}{2}\varphi \equiv \infty$, so folgt durch denselben Schluss wie soeben:

$$1+\text{Tang}^2\frac{q-1}{4}\varphi \equiv 0 \ (\text{mod.}\,q),$$

$$\text{Tang}\frac{q-1}{4}\varphi \equiv \pm i \ (\text{mod.}\,q).$$

Nun ist das Uebrige einfach. Wir brauchen nur dieselben Schlüsse zu ziehen, welche in der Theorie der Potenzreste zum Nachweise der primitiven Wurzeln gezogen werden. Dann ergiebt sich, dass mindestens eine Zahl $m \equiv \text{Tang}\,\varphi$ existirt, so dass $\text{Tang}\,n\varphi$ für keine niedrigere Zahl als $n = \frac{q-1}{4}$ congruent i wird. Sei

$$\tau \equiv \text{Tang}(g\varphi) \ (\text{mod.}\,q),$$

dann sind die acht Argumente, welche die acht zusammengehörenden Werthe der τ liefern, die folgenden:

$$g\varphi, \quad g\varphi+\frac{q-1}{2}\varphi, \quad g\varphi+\frac{q-1}{4}\varphi, \quad g\varphi+3\cdot\frac{q-1}{4}\varphi;$$

$$-g\varphi, \quad -g\varphi+\frac{q-1}{2}\varphi, \quad -g\varphi+\frac{q-1}{4}\varphi, \quad -g\varphi+3\cdot\frac{q-1}{4}\varphi.$$

Ist also Tangφ *primitiv*, so bilden wir

$$\text{Tang}\varphi,\quad \text{Tang}(2\varphi),\quad \ldots,\quad \text{Tang}\Big(E\Big(\frac{q-1}{8}\Big)\cdot\varphi\Big)$$

und haben dann eine Reihe von $E\left(\frac{q-1}{8}\right)$ Werthen, welche zu verschiedenen Gruppen führen.

Es ist bemerkenswerth, dass Tangφ, welches eine imaginäre Periode hat, hier mit dem *reellen* Factor der Periode in die Rechnung eingeht.

Zum Schlusse mögen einige besondere Gruppen bezw. Gleichungen Erwähnung finden.

Zunächst diejenige Gleichung, welche das Quadrat eines δ enthält. Sollen $\delta_{\text{ind}\,\tau}$ und $\delta_{\text{ind}\,\varrho}$ übereinstimmen, so muss sein

$$\tau.i^h \equiv \frac{1+\tau i}{1+i} \pmod{\eta}.$$

Nur $h=2$ oder $=3$ ist zulässig, und dann wird gefunden:

$$\tau \equiv -\frac{1}{1+2i},\quad \varrho \equiv \frac{1}{1+2i},\quad \sigma \equiv \frac{-1+2i}{1+2i}\quad \text{oder}$$

$$\tau \equiv \frac{1}{1-2i},\quad \varrho \equiv \frac{-i}{1-2i},\quad \sigma \equiv \frac{-i+2}{1-2i} \pmod{\eta}.$$

Beide Dreiheiten gehören derselben Gruppe an. Am besten ertheilt man ihnen die Form

$$\tau = -1+2i,\quad \varrho = q-1,\quad \sigma = -1-2i.$$

Dann findet man:

$$\frac{\delta_{\text{ind}(-1+2i)}}{\delta_0} = \frac{\delta_0 + i\delta_{\text{ind}(-1-2i)}}{i\delta_0 + \delta_{\text{ind}(-1-2i)}}.$$

Man bestätigt diese Gleichung durch bekannte Beziehungen; vergl. dieses Journal Bd. 107, Gl. 71.

Eine zweite merkwürdige Gruppe ist die viergliedrige für $q=8m+1$. Hier findet man die Dreiheiten ($\varepsilon^2 \equiv i \pmod{\eta}$)

$$\tau,\quad -\varepsilon\tau,\quad \varepsilon$$

und die Gleichung:

$$\frac{\delta_{\text{ind}\tau}}{\delta_0} = \frac{-\delta_{\text{ind}\tau+\frac{1}{2}\mu} + i\delta_{\frac{1}{2}\mu}}{-i\delta_{\text{ind}\tau+\frac{1}{2}\mu} + \delta_{\frac{1}{2}\mu}},$$

wo $(\tau+i)^2 \equiv -2 \pmod{\eta}$, oder $\tau \equiv \varepsilon+\varepsilon^3-\varepsilon^2 \pmod{\eta}$.

Nunmehr können wir zur Betrachtung der *Discriminante* der Theilungsgleichung übergehen. Die Theilungsgleichung der Perioden hat die Wurzeln

δ^4, und es ist

$$\prod_0^{\mu-1} \delta_r^4 = (-1)^\mu \eta,$$

wie wir in obiger Abhandlung Gl. (69.) gesehen haben. Es handelt sich um die Bestimmung der Grösse

$$\Delta = \prod_{r,s} (\delta_r^4 - \delta_s^4)^2; \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots \mu-1)$$

Gleichung (9ᵃ.) können wir in die Form setzen:

$$(10.) \qquad (\delta_h + i\delta_{h+\mathrm{ind}\tau})(\delta_{h+\mathrm{ind}\varrho} + i\delta_{h+\mathrm{ind}\sigma}) = 2i\delta_{h+\mathrm{ind}\tau}\delta_{h+\mathrm{ind}\varrho}.$$

Diese Gleichung ist gültig für jedes $h = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1$; und für jedes τ mit Ausnahme der Werthe $\tau^4 \equiv 1 \pmod{q}$. Es kann also $\mathrm{ind}\tau$ jeden sonstigen Werth $1, 2, 3, \ldots, q-1$ annehmen. Bildet man das Product aller Gleichungen (10.), für welche $\mathrm{ind}\tau$ einen bestimmten, h alle zulässigen Werthe annimmt, so erscheinen links Glieder von der Form $\delta_r + i\delta_s$, wo $s-r = \mathrm{ind}\tau$ oder $= \mathrm{ind}\varrho - \mathrm{ind}\sigma$ ist. Letztere Zahl ist irgend ein $\mathrm{ind}\tau_1$, wo τ_1 mit τ zu derselben Gruppe gehört. Lässt man nun links τ alle zulässigen Werthe durchlaufen, indem man nur die eine Hälfte nimmt, die von selbst entstehenden τ_1 aber vermeidet, so erhält man alle denkbaren Combinationen $\delta_r + i\delta_s$, und zwar in der Zahl $\frac{q-5}{2} \cdot 2\mu$ und jede nur einmal. Es erscheinen also Factoren von der Form $(\delta_r^4 - \delta_s^4)^2$ in der Zahl $\frac{q-5}{4} \cdot \mu = \mu(\mu-1)$, und jeder nur einmal. Rechts erhält man, abgesehen von Einheitsfactoren, η in der Potenz $\frac{1}{2}$ aus dem Producte über die h, also in der Potenz $\frac{q-5}{4}$ aus dem Producte über die τ; dagegen $1+i$ in der Potenz $2\mu \cdot \frac{q-5}{2}$, also:

In Δ kommen ausser Potenzen von i nur vor

$$(1+i)^{4\mu(\mu-1)} \cdot \eta^{\mu-1}.$$

Obige Herleitung gilt nur für $q = 8m+5$. Für $q = 8m+1$ muss man die viergliedrige Ausnahmegruppe betrachten. Das Ergebniss ist das gleiche.

Beispiele: $q = 13, 17, 29$.

1) $\eta = 3+2i$.

Nach unserem obigen Beispiele lautet Gleichung (9.), wenn wir statt δ wieder den Buchstaben γ verwenden,

$$\frac{\gamma_7}{\gamma_0} = \frac{\gamma_2 + i\gamma_6}{i\gamma_2 + \gamma_6}.$$

Führen wir ein

$$x_0 = \gamma_0, \quad x_1 = \gamma_4, \quad x_2 = \gamma_8,$$

so wird daraus:

$$(11.) \qquad x_0^2 = x_0 x_1 + i x_0 x_2 + i x_1 x_2.$$

Dies ist die einzige Gleichung, welche entsteht. Man leitet aus derselben ab:

$$(x_2 - x_0)(x_2 - i x_1) = 2 i x_0 x_1, \quad (x_0 + x_1)(x_0 + i x_2) = 2 x_0^2,$$
$$(x_0 - x_1)(x_0 - i x_2) = 2 i x_1 x_2, \quad (x_1 + x_2)(x_1 + i x_0) = 2 x_1^2,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - i x_0) = 2 i x_2 x_0, \quad (x_2 + x_1)(x_2 + i x_1) = 2 x_2^2,$$

und daraus durch Multiplication:

$$(x_0^4 - x_1^4)(x_1^4 - x_2^4)(x_2^4 - x_0^4) = 64 i . \eta.$$

Da $\mu = 3$, $\mu - 1 = 2$, $4\mu(\mu-1) = 24$ ist, so ist die Bestätigung geliefert, indem $(1+i)^{12} = -64$ ist.

2) $\eta = 1 + 4i$.

Hier erhält man zwei Dreiheiten, und zwar für $g = 10$:

$$\tau = 14, \quad \varrho = 8, \quad \sigma = 7;$$
$$\tau = 5, \quad \varrho = 11, \quad \sigma = 12;$$
$$\operatorname{ind}\tau = 3, \quad 7,$$
$$\operatorname{ind}\varrho = 14, \quad 13,$$
$$\operatorname{ind}\sigma = 9, \quad 15.$$

Die Zahlen 1, 4, 16, 13 sind als Congruenzwurzeln für $\tau^4 \equiv 1 \pmod{17}$ auszuschliessen; die übrigen ordnen sich in zwei Gruppen, wie folgt:

$\tau = 2, \ 9, \ 10, \ 12, \ 15, \ 8, \ 5, \ 7;$ (8-gliedrige Gruppe),

$\tau = 3, \ 6, \ 14, \ 11;$ (4-gliedrige Gruppe).

Die beiden entsprechenden Gleichungen sind:

$$1) \ \frac{\gamma_{h+3}}{\gamma_h} = \frac{\gamma_{h+14} + i\gamma_{h+9}}{i\gamma_{h+14} + \gamma_{h+9}}; \quad 2) \ \frac{\gamma_{h+7}}{\gamma_h} = \frac{\gamma_{h+13} + i\gamma_{h+15}}{i\gamma_{h+13} + \gamma_{h+15}}.$$

Hieraus kann man, da $\gamma_4 = i\gamma_0$, $\gamma_5 = i\gamma_1$, ..., u. s. w. ist, ableiten:

$$(12.) \qquad \begin{cases} \gamma_0^2 = -\gamma_0\gamma_2 + i\gamma_1\gamma_2 - i\gamma_0\gamma_1, \\ i\gamma_0\gamma_1 + \gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_3 - i\gamma_0\gamma_2. \end{cases}$$

Aus diesen kann man ziehen:

$$(\gamma_2^2 + \gamma_0^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) = -4\gamma_0\gamma_3\gamma_2^2,$$
$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_3^2 + \gamma_0^2) = 4i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Vertauscht man cyklisch, indem man die höheren Indices ersetzt, so wird

$$(\gamma_0^4-\gamma_1^4)\dots(\gamma_3^4-\gamma_0^4)(\gamma_0^4-\gamma_2^4)(\gamma_1^4-\gamma_3^4) = 4^6.\eta^{\frac{3}{4}},$$

also erscheint in der Discriminante η in $\mu-1=3$ter, $1+i$ in $4\mu(\mu-1)=48$ster Potenz.

3) $\eta=-5+2i$.

Hier finden wir die Dreiheiten: $(g=18)$

$$\begin{array}{llll} \tau = 26, & 5, & 18; & \operatorname{ind}\tau = 17, \quad 2, \quad 1, \\ \varrho = 23, & 8, & 9; & \operatorname{ind}\varrho = 12, \quad 13, \quad 6, \\ \sigma = \ \,4, & 27, & 10; & \operatorname{ind}\sigma = 18, \quad 9, \quad 25. \end{array}$$

Setzt man wieder $x_0=\gamma_0$, $x_1=\gamma_4$, ..., $x_6=\gamma_{24}$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(13.)\qquad \begin{cases} x_0x_3-ix_0x_1-x_3x_6-ix_1x_6 = 0, \\ x_0x_2+ix_0x_6+ix_2x_6+x_6^2 = 0, \\ x_3x_4+x_2x_3+x_0x_4-x_0x_2 = 0. \end{cases}$$

Zur Discriminantenbestimmung zieht man aus denselben:

$$\begin{aligned} (x_0^2-x_3^2)(x_2^2-x_2^4) &= 4x_0x_1x_3x_4, \\ (x_0^2+x_6^2)(x_2^2+x_6^2) &= -4x_0x_2x_6^2, \\ (x_0^2-x_6^2)(x_1^2+x_3^2) &= 4ix_0x_1x_3x_6. \end{aligned}$$

Vertauscht man cyklisch, (indem x_7 in x_0 übergeht), so wird:

$$\begin{aligned} &(x_0^4-x_1^4)(x_1^4-x_2^4)\dots(x_6^4-x_0^4). \\ &(x_0^4-x_2^4)(x_1^4-x_3^4)\dots(x_6^4-x_1^4). \\ &(x_0^4-x_3^4)(x_1^4-x_4^4)\dots(x_6^4-x_2^4) = i^7.4^{21}.\eta^3. \end{aligned}$$

Man findet durch Quadrirung:

$$\varDelta = -(1+i)^{4\mu(\mu-1)}.\eta^{\mu-1}.$$

Die Berechnung der Dreiheiten ist, wie wir gesehen haben, einfach. Daraus folgt, dass auch die Aufstellung der Wurzelgleichungen und die Berechnung der Discriminante leicht ist.

§ 4.

Die Resolvente der Theilungsgleichung.

Wie wir schon in unseren Beispielen erkannt haben, zeigen die Primzahlen $8m+1$ und $8m+5$ bedeutende Verschiedenheiten für die uns hier

beschäftigenden Fragen. In der That ist es von jetzt ab geboten, die Untersuchung für diese beiden Zahlenklassen gesondert zu führen. Doch ist vorher noch eine Aufgabe zu erledigen, welche für die Lösung der Theilungsgleichungen von hervorragender Bedeutung ist. Diese Aufgabe besteht in Folgendem:

Sei q irgend eine reelle Primzahl $8m+1$ oder $8m+5$, $q=\eta.\eta'$;

$$\delta_r = \sin\operatorname{am}\frac{4g^rK}{\eta};$$

ϱ irgend eine complexe Primzahl mit der Norm p,

$$\gamma_r = \sin\operatorname{am}\frac{4g_1^rK}{\varrho}.$$

Dann ist, da ϱ eine ungerade Zahl ist,

$$\frac{\delta_0}{\delta_{\operatorname{ind}\varrho}} = \frac{\sin\operatorname{am}\frac{4K}{\eta}}{\sin\operatorname{am}\frac{4\varrho K}{\eta}}$$

und die rechte Seite eine rationale Function von δ_0^4. Vertauschen wir nun δ_0 mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ und addiren, so erhalten wir rechts eine symmetrische Function der Wurzeln der Theilungsgleichung, also eine rationale Zahl. Es lässt sich zeigen, dass diese Zahl sogar immer eine ganze Zahl ist. Es ist $\operatorname{ind}\varrho$ zu erklären durch die Congruenz

$$g^{\operatorname{ind}\varrho} \equiv \varrho \pmod{\eta}; \quad g^\mu \equiv i \pmod{\eta}.$$

Nun zeigt man analog wie früher (dieses Journal Bd. 107, S. 224, Gl. (77.)), dass man setzen kann:

$$\eta\frac{\sin\operatorname{am}(u)}{\sin\operatorname{am}(\eta u)} = 1-4x^4\sum_0^{\mu-1}\frac{\sqrt{1-\delta_n^4}}{\delta_n^4-x^4}; \quad x = \sin\operatorname{am} u.$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$\eta\frac{\sin\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am}(\eta u)} = 1+4x^4\sum\frac{1}{\sqrt{1-\delta_n^4}}-4x^4(1-x^4)\sum\frac{1}{(\delta_n^4-x^4)\sqrt{1-\delta_n^4}}.$$

Setzt man also

$$u=\frac{4g_1^{\operatorname{ind} m}.K}{\varrho}, \quad x=\gamma_m, \quad g_1^{\operatorname{ind} m}\equiv m \pmod{\varrho}, \quad g_1^\nu \equiv i \pmod{\varrho}, \quad \nu=\frac{p-1}{4},$$

so wird:

$$\eta\cdot\frac{\gamma_m}{\gamma_{m+\operatorname{ind}\eta}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}}+\frac{4\gamma_m^4}{\sqrt{1-\gamma_m^4}}\sum_n\frac{1}{\sqrt{1-\delta_n^4}}$$
$$-4\gamma_m^4\sqrt{1-\gamma_m^4}.\sum_n\frac{1}{(\delta_n^4-\gamma_m^4)\sqrt{1-\delta_n^4}}.$$

Wenn wir nun in dem dritten Summanden rechts $\gamma_m^4 = \delta_n^4 - (\delta_n^4 - \gamma_m^4)$ schreiben und den sich abscheidenden Theil mit dem zweiten vereinigen, so finden wir

$$\eta\frac{\gamma_m}{\gamma_{m+\operatorname{ind}\eta}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}}+4\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}}\sum_n\frac{1}{\sqrt{1-\delta_n^4}}+4\sum_n\frac{\delta_n^4\sqrt{1-\gamma_m^4}}{(\gamma_m^4-\delta_n^4)\sqrt{1-\delta_n^4}}.$$

Nun summiren wir auch über die γ, indem wir die obige Formel

$$\varrho\frac{\delta_n}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}\sqrt{1-\delta_n^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta_n^4}}-4\sum_m\frac{\delta_n^4\sqrt{1-\gamma_m^4}}{(\gamma_m^4-\delta_n^4)\sqrt{1-\delta_n^4}}$$

verwenden, und finden zunächst:

$$\eta\sum_m\frac{\gamma_m}{\gamma_{m+\operatorname{ind}\eta}\sqrt{1-\gamma_m^4}} = \sum_m\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}}+\sum_n\frac{1}{\sqrt{1-\delta_n^4}}$$
$$+4\sum_{m,n}\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}\sqrt{1-\delta_n^4}}-\varrho\sum\frac{\delta_n}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}\sqrt{1-\delta_n^4}}.$$

Multipliciren wir mit $1+i$ und beachten die Gleichung (obige Abh. Bd. 107, S. 225, Gl. (81.))

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_m^4}} = \frac{\varrho-1}{4},$$

so wird endlich:

$$(14.)\qquad \eta\sum_m\frac{\gamma_{m+\operatorname{ind}(1+i)}}{\gamma_{m+\operatorname{ind}\eta}}+\varrho\sum_n\frac{\delta_{n+\operatorname{ind}(1+i)}}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}} = \frac{\varrho\eta-1}{2-2i}.$$

Diese Gleichung ist die gesuchte. Ihre Wichtigkeit wird aus den folgenden Darlegungen erhellen. Hier sei schon bemerkt, dass sie eine gewisse Art symmetrischer Functionen der einen Theilungsgleichung mit denselben einer anderen Theilungsgleichung in einfachste Beziehung bringt.

Zunächst folgt aus (14.)

$$\sum\frac{\delta_{n+\operatorname{ind}(1+i)}}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}} \equiv -\frac{1}{(2-2i)\varrho}\ (\text{mod.}\,\eta),$$

oder, wenn man ϱ durch $(1+i)\varrho$ ersetzt,

$$(15.)\qquad \sum_n\frac{\delta_n}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}} \equiv -\frac{1}{4\varrho}\ (\text{mod.}\,\eta).$$

Diese Congruenz ist abgeleitet aus (14.) und bei dieser wurde vorausgesetzt, dass ϱ wie η eine ungerade Primzahl sei. Ist aber a eine willkürliche Zahl, $a\equiv\varrho$ (mod. η), so ist

$$\sum_n\frac{\delta_n}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}} = \sum\frac{\delta_n}{\delta_{n+\operatorname{ind}a}};\quad \frac{1}{\varrho}\equiv\frac{1}{a};$$

daher gilt (15.) ganz allgemein für jede Zahl ϱ.

Die Gleichung (14.) kann man in der Form schreiben:

$$\eta\sum_m \frac{\sin\operatorname{am}\frac{4m(1+i)K}{\varrho}}{\sin\operatorname{am}\frac{4m\eta K}{\varrho}}+\varrho\sum_n \frac{\sin\operatorname{am}\frac{4n(1+i)K}{\eta}}{\sin\operatorname{am}\frac{4n\varrho K}{\eta}} = \frac{\varrho\eta-1}{2-2i}.$$

$$m = 1,\ g,\ g^2,\ \dots,\ g^{\frac{p-5}{4}}\ (\text{mod.}\varrho);\quad n = 1,\ g_1,\ g_1^2,\ \dots,\ g_1^{\frac{q-5}{4}}\ (\text{mod.}\eta).$$

Dieselbe gilt nicht nur für Primzahlen, sondern auch für willkürliche ungerade complexe Zahlen in primärer Form. Nur müssen ϱ und η relativ prim sein und die Summation ist etwas anders anzugeben. Man findet die hier nöthigen Bestimmungen leicht. Sei nun

$$\begin{aligned}
\eta &= a_1\varrho+i^h\tau,\\
\varrho &= a_2\tau+i^k\sigma,\\
\tau &= a_3\sigma+i^l v,\\
&\cdots\cdots\\
\varphi &= a_t\omega+i^s;
\end{aligned}$$

$\eta,\ \varrho,\ \sigma,\ v,\ \dots,\ \omega$ bezeichnen ungerade *primäre* complexe Zahlen mit stets abnehmender Norm

$$q>p>\sigma\sigma'>vv'>\cdots>\omega\omega'.$$

Dann wird

$$\frac{1}{\eta}\sum_m \frac{\sin\operatorname{am}\frac{4m(1+i)K}{\eta}}{\sin\operatorname{am}\frac{4m\varrho K}{\eta}} = \frac{1+i}{4}\Big\{1-\frac{1}{\varrho\eta}-i^{-h}\Big(1-\frac{1}{\varrho\tau}\Big)$$

$$+i^{-h-k}\Big(1-\frac{1}{\tau\sigma}\Big)\cdots\pm i^{-h-k-\cdots-s}\Big(1-\frac{1}{\omega}\Big)\Big\}.$$

Hieraus leitet man ohne Mühe das merkwürdige Ergebniss ab:

$$(16.)\qquad \sum_m \frac{\sin\operatorname{am}\frac{4m(1+i)K}{\eta}}{\sin\operatorname{am}\frac{4m\varrho K}{\eta}} = \frac{1+i}{4}\eta A-\frac{1+i}{4}\cdot B$$

Hier bedeutet B diejenige Wurzel der Congruenz

$$B\varrho \equiv 1\quad(\text{mod.}\eta),$$

welche die obige *Kettenbruchentwicklung* liefert:

$$\frac{\eta}{\varrho} = a_1+\cfrac{i^h}{a_2+\cfrac{i^k}{a_3+\ddots}},$$

und A ist der Ausdruck:

$$A = 1-i^{-h}+i^{-h-k}-i^{-h-k-l}+\cdots+(-1)^t i^{-h-k-\cdots-z}.$$

Beispiele.

1) $\eta = a_1\varrho+i^h;$

$$S_\varrho = \frac{1+i}{4}\{\eta(1-i^{-h})+a_1 i^{-h}\}.$$

2) $\eta = a_1\varrho+i^h\tau,$

$\varrho = a_2\tau+i^k;$

$$S_\varrho = \frac{1+i}{4}\{\eta(1-i^h+i^{-h-k})-i^{-h-k}(a_1a_2+i^h)\}.$$

3) $\eta = a_1\varrho+i^h\tau,$

$\varrho = a_2\tau+i^k\sigma,$

$\tau = a_3\sigma+i^l;$

$$S_\varrho = \frac{1+i}{4}\{\eta(1-i^{-h}+i^{-h-k}-i^{-h-k-l})+i^{-h-k-l}(a_1a_2a_3+a_3i^k+a_1i^k)\}.$$

$$S_\varrho = \sum_m \frac{\sin\operatorname{am}\dfrac{4m(1+i)K}{\eta}}{\sin\operatorname{am}\dfrac{4m\varrho K}{\eta}} = \sum_0^{\mu-1}{}_n \frac{\delta_{n+\operatorname{ind}(1+i)}}{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}}.$$

§ 5.

Fortsetzung. Anwendung auf die Primzahlen $q = 8m+5$.

Für diese Zahlen haben wir es bereits als praktisch erkannt, die neuen Unbekannten einzuführen:

$$x_r = \delta_{4r}.$$

Sei nun α eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\alpha^\mu = 1$$

und:

$$(\alpha^{-1},\ x) = x_0+\alpha^{-1}x_1+\alpha^{-2}x_2+\cdots+\alpha^{-\mu+1}x_{\mu-1},$$

$$\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_0}+\alpha\frac{1}{x_1}+\alpha^2\frac{1}{x_2}+\cdots+\alpha^{\mu-1}\cdot\frac{1}{x_{\mu-1}}\cdot$$

Dann wird:

$$(17.)\quad \begin{cases} (\alpha^{-1},\ x).(\alpha,\ x^{-1}) = \dfrac{q-1}{4}+\alpha\left(\dfrac{x_0}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{\mu-1}}{x_0}\right) \\ \quad +\alpha^2\left(\dfrac{x_0}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}+\cdots+\dfrac{x_{\mu-1}}{x_1}\right)+\cdots+\alpha^{\mu-1}\left(\dfrac{x_0}{x_{\mu-1}}+\dfrac{x_1}{x_0}+\cdots+\dfrac{x_{\mu-1}}{x_{\mu-2}}\right). \end{cases}$$

Ist nun die Gleichung der x:

$$x^\mu - f_1 x^{\mu-1} + f_2 x^{\mu-2} - \cdots + f_{\mu-1} x - \varepsilon \sqrt[4]{\eta} = 0,$$

wo $\varepsilon^2 = i$, so hat f_1 ausser einem Factor, der eine Potenz von ε ist, für $q = 16m+5$ den Factor $\sqrt[4]{\eta}$, für $q = 16m+13$ den Factor $\sqrt[4]{\eta^3}$; $f_{\mu-1}$ ist für $q = 16m+5$ ganzzahlig, für $q = 16m+13$ hat es ausser einer Potenz von i den Factor $\sqrt{\eta}$. Dies hat schon *Eisenstein* erkannt (dieses Journal Bd. 39). Daher ist $(1, x)\left(1, \frac{1}{x}\right)$ *eine ganze Zahl und theilbar durch* η, nämlich

$$(1, x)\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{f_1 f_{\mu-1}}{\varepsilon \sqrt[4]{\eta}} = (x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1})\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{\mu-1}}\right).$$

Nach Gleichung (17.) ist $(\alpha^{-1}, x)(\alpha, x^{-1})$ eine ganze complexe Zahl gebildet aus μten Wurzeln der Einheit. Ferner ist nach (15.)

$$\sum_r \frac{x_r}{x_{r+m}} = \sum_r \frac{\delta_{4r}}{\delta_{4r+4m}} \equiv -\tfrac{1}{4} g^{-4m} \pmod{\eta},$$

also:

$$-4(\alpha^{-1}, x)(\alpha, x^{-1}) \equiv \sum_0^{\mu-1} \alpha^m g^{-4m} \pmod{\eta}.$$

Ersetzen wir nun α durch g^4, so wird die rechte Seite $\equiv 0 \pmod{\eta}$, also auch $\pmod{q}$, den einzigen Fall ausgenommen, wo $\alpha \equiv g^4$. Ist also $\pi(\alpha)$ ein Primtheiler von η derart, dass $\pi(g^4) \equiv 0 \pmod{q}$, so folgt, dass

die ganze complexe Zahl $(\alpha^{-1}, x)(\alpha, x^{-1})$ *immer alle Primfactoren von* η *enthält mit Ausnahme dieses einzigen;* $(\alpha^{-1}, x)(\alpha, x^{-1})$ *ist theilbar durch* $\frac{\eta}{\pi(\alpha)}$.

Unter den Grössen x bestehen, wie wir gesehen haben, $E\left(\frac{q}{8}\right)$ von einander formell unabhängige Gleichungen, die wir in den Beispielen Gleichung (11.) und (13.) näher kennen lernten. Aus diesen Gleichungen lässt sich nun die Bestimmung der Resolventen (α, x) und $\left(\alpha, \frac{1}{x}\right)$ ableiten, wie folgt. Wir setzen:

$$(18.) \quad \begin{cases} f = x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1}, \\ y_1(\alpha) = x_0 x_1 + \alpha x_1 x_2 + \alpha^2 x_2 x_3 + \cdots + \alpha^{\mu-1} x_{\mu-1} x_0, \\ y_2(\alpha) = x_0 x_2 + \alpha x_1 x_3 + \alpha^2 x_2 x_4 + \cdots + \alpha^{\mu-1} x_{\mu-1} x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m(\alpha) = x_0 x_m + \alpha x_1 x_{m+1} + \alpha^2 x_2 x_{m+2} + \cdots + \alpha^{\mu-1} x_{\mu-1} x_{\mu+m-1}, \\ y_0(\alpha) = x_0^2 + \alpha x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \cdots + \alpha^{\mu-1} x_{\mu-1}^2. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen stehen ebenso viele und ganz analog gebildete zur Seite, nämlich

$$(19.)\quad \begin{cases} \mathfrak{Y} = \dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_{\mu-1}}, \\ \mathfrak{y}_m(\alpha) = \dfrac{1}{x_0 . x_m}+\dfrac{\alpha}{x_1 x_{m+1}}+\dfrac{\alpha^2}{x_2 x_{m+2}}+\cdots+\dfrac{\alpha^{\mu-1}}{x_{\mu-1} x_{m+\mu-1}}. \end{cases}$$

Die Anzahl der $y_m(\alpha)$ und ebenso die der $\mathfrak{y}_m(\alpha)$ ist $\frac{\mu+1}{2} = \frac{q+3}{8}$, die Anzahl der Gleichungen unter den x ist $\frac{q-5}{8}$, also um eine Einheit kleiner. Aus jeder Gleichung geht aber, wenn man cyklisch verschiebt, der Reihe nach mit α, α^2, ... multiplicirt und addirt, eine Gleichung und zwar eine lineare von sehr einfacher Form unter den y (oder $\mathfrak{y}$) hervor. Folglich kann man alle $y_m(\alpha)$ und ebenso alle $\mathfrak{y}_m(\alpha)$ durch ein einziges unter den $y_m(\alpha)$ bez. den $\mathfrak{y}_m(\alpha)$ linear ausdrücken. Bilden wir also das Product:

$$(\alpha,\ x).f = y_0(\alpha)+(1+\alpha)y_1(\alpha)+(1+\alpha^2)y_2(\alpha)+\cdots+(1+\alpha^{\frac{\mu-1}{2}})y_{\frac{1}{2}(\mu-1)}(\alpha),$$

oder:

$$\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}_0(\alpha)+(1+\alpha)\mathfrak{y}_1(\alpha)+(1+\alpha^2)\mathfrak{y}_2(\alpha)+\cdots+(1+\alpha^{\frac{\mu-1}{2}})\mathfrak{y}_{\frac{1}{2}(\mu-2)}(\alpha),$$

dann wird nach gehöriger Umformung:

$$(\alpha,\ x)f = R(\alpha)y(\alpha);\quad \left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right) = R_1(\alpha)\mathfrak{y}(\alpha),$$

wo R und R_1 rationale Functionen von α bedeuten und $y(\alpha)$ und $\mathfrak{y}(\alpha)$ irgend ein willkürlich gewähltes Paar aus den (18.) und (19.) eingeführten Grössen. Bilden wir nun

$$(\alpha^h,\ x)(\alpha^k,\ x) = y_0(\alpha^{h+k})+(\alpha^h+\alpha^k)y_1(\alpha^{h+k})+(\alpha^{2h}+\alpha^{2k})y_2(\alpha^{2h+2k})+\cdots,$$

so ergiebt sich

$$(20.)\qquad \frac{(\alpha^h,\ x)(\alpha^k,\ x)}{(\alpha^{h+k},\ x)f} = \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)},$$

wo $g(\alpha)$ und $g_1(\alpha)$ ganze ganzzahlige Functionen von α sind. Ferner ist $(\alpha^h, x)^\mu$ eine homogene und symmetrische Function der x, da sie bei der cyklischen Verschiebung ungeändert bleibt. Durch Betrachtung von

$$\frac{(\alpha^h,\ x)^\mu}{x_0 x_1 \ldots x_{\mu-1}}$$

zeigt man nun, dass $(\alpha^h, x)^\mu$ eine ganze Zahl ist, begleitet von dem Factor

$\varepsilon\sqrt[4]{\eta}$. Zerlegen wir diese ganze Zahl in ihre Primfactoren, und sei einer derselben $\pi(\alpha^r)$ vorkommend in $m_r$ter Potenz, also

$$(\alpha^h,\ x)^\mu = \cdots (\pi(\alpha^r))^{m_r} \ldots \sqrt[4]{-\eta}.$$

Da nun die linke Seite von (20.) eine genaue μte Potenz von den Primfactoren sein muss, so erhält man für die m_r eine Reihe Congruenzen mit dem Modul μ, welche $(\alpha,\ x)^\mu$ abgesehen von μten Potenzen völlig bestimmen. Man findet:

$$(\alpha,\ x)^\mu = \pi(\alpha^{m_1}).\pi^2(\alpha^{m_2}).\pi^3(\alpha^{m_3})\ldots \sqrt[4]{-\eta},$$
$$1.m_1 \equiv 2.m_2 \equiv 3.m_3 \equiv \cdots \pmod{\mu}.$$

Diese Schlüsse gelten aber nicht allein für die lemniskatischen Functionen. In jener berühmten Abhandlung (Berl. Bericht vom 20. Juni 1853) sind sie für die *Abel*schen Gleichungen bereits allgemein von *Kronecker* gezogen worden. Mit der Gleichung (20.) sind diese Schlüsse gegeben.

Es ist

$$(\alpha^h,\ x)(\alpha^{-h},\ x) = \Sigma x_r^2 + (\alpha^h+\alpha^{-h})\Sigma x_r x_{r+1} + (\alpha^{2h}+\alpha^{-2h})\Sigma x_r x_{r+2} + \cdots.$$

Die Summen rechter Hand sind symmetrisch, daher ganze Zahlen mit dem Factor $\sqrt{\eta}$. Man findet:

$$(21.)\qquad (\alpha^h,\ x)(\alpha^{-h},\ x) = G_2(\alpha).\sqrt{\eta}.$$

Merkwürdiger Weise gelingt es nicht immer, die Summen $\sum\limits_r x_r x_{r+s}$ mit Hülfe der ersten unter den $x_r x_s$ bestehenden Gleichungen zu bestimmen. So sind für $q = 53$ unter den $x_r x_s$ sechs „unabhängige" Gleichungen vorhanden. Aber die daraus durch Addition der cyklischen Vertauschungen hervorgehenden sieben Grössen $\sum\limits_r x_r x_{r+s}$ sind nicht durch eine einzige linear ausdrückbar. Die entstehenden Gleichungen sind eben nicht von einander unabhängig. Allein auch in diesem Falle kommen wir zum Ziel, indem wir Gleichung (20.) bilden. Es scheidet sich dann bei $G_1(x)$ eine ganze complexe Zahl aus, und diese liefert f.

Weil diese Erscheinung gewiss merkwürdig ist, so will ich schon an dieser Stelle die betreffenden Gleichungen mittheilen. Die sonstigen Beispiele folgen an späterer Stelle.

Die unabhängigen Dreiheiten sind für $\eta = 7-2i$, $q = 53$:

$$\tau = 5,\ 6,\ 13,\ 12,\ 10,\ 14;$$
$$\varrho = 10,\ 52,\ 28,\ 39,\ 8,\ 17;$$
$$\sigma = 49,\ 8,\ 39,\ 27,\ 3,\ 51;$$
$$g = 2 \quad \begin{cases} \text{ind}\,\tau = 47,\ 18,\ 24,\ 19,\ 48,\ 15; \\ \text{ind}\,\varrho = 48,\ 26,\ 16,\ 41,\ 3,\ 10; \\ \text{ind}\,\sigma = 28,\ 3,\ 41,\ 51,\ 17,\ 27. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich mit Hülfe der Gleichung (9.) die nachstehenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} 1) & x_0x_{12}-x_2x_{12}+ix_0x_7+ix_2x_7 = 0, \\ 2) & x_0^2-x_0x_4+ix_0x_{11}+ix_4x_{11} = 0, \\ 3) & x_0x_7-x_0x_4+ix_4x_6+ix_6x_7 = 0, \\ 4) & x_0x_1-x_0x_6+ix_1x_9+ix_9x_6 = 0, \\ 5) & x_0x_5+x_1x_2+ix_0x_2+ix_1x_5 = 0, \\ 6) & x_0x_3+x_0x_2+x_3x_6-x_2x_6 = 0. \end{array}$$

Erklärt man nun, die Summen (00), (01) wie weiter unten angegeben, so folgt:

$$(00) = (1-i)(02)+(2-i)(03); \quad (01) = -(1+i)(02)-i(03);$$
$$(04) = (02)+2.(03); \quad (05) = (1-i)(02)-i(03); \quad (06) = (03).$$

Weiter kann man nicht kommen. Aber, wenn man die Gleichungen für die y löst, so findet sich, dass die Gleichung zwischen $y_2(\alpha)$ und $y_3(\alpha)$ den Theiler $1-\alpha^4$ hat. Entfernt man ihn, so folgt durch $\alpha = 1$ das richtige Ergebniss

$$(02) = (1+2i)(03).$$

Bildet man die Gleichungen für die $\frac{1}{x_r}\cdot\frac{1}{x_s}$, so erhält man genau ebenso unter den cyklischen Summen $\sum\limits_r \frac{1}{x_r x_{r+s}}$ nicht völlig unabhängige Gleichungen.

Alles von uns Bewiesene gilt wie für (α, x) immer auch für $\left(\alpha, \frac{1}{x}\right)$. Die ganze complexe Zahl:

$$(\alpha, x)(\alpha^{-1}, x)\left(\alpha, \frac{1}{x}\right)\left(\alpha^{-1}, \frac{1}{x}\right) = L$$

hat daher den Theiler $\frac{\eta^2}{\pi(\alpha)\pi(\alpha^{-1})}$; und da nach (21.) aus dieser Zahl L

immer η als Factor sich abtrennt, so ist der übrig bleibende Factor von L immer theilbar durch $\frac{\eta}{\pi(\alpha)\pi(\alpha^{-1})}$. Es ist nach den hier befolgten Methoden nicht möglich anzugeben, was nach dieser Division übrig bleibt. Für die Kreistheilung ist der analoge Ausdruck

$$(\alpha,\ x)(\alpha^{-1},\ x) = \pm p \quad \text{oder} \quad (\alpha,\ x)(\alpha^{-1},\ x^{-1}) = p$$

für $x^p = 1$, $\alpha^{p-1} = 1$ bekannt. Daher ist an dieser Stelle noch eine Lücke auszufüllen. Eine andere bedeutsame Aufgabe ist ebenfalls noch nicht gelöst. Sie verlangt die Bestimmung des Coefficienten f, oder die der Summe

$$f = \delta_0 + \delta_4 + \delta_8 + \cdots + \delta_{q-5} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1}.$$

Wäre diese Aufgabe gelöst, so hätte man den Werth der Summe, welche in der Theorie der Lemniskatentheilung den *Gauss*schen Summen der Kreistheilung entspricht. Es ist ja

$$4f = \sin\text{am}(1^4 v) + \sin\text{am}(2^4 v) + \sin\text{am}(3^4 v) + \cdots + \sin\text{am}((q-1)^4 v)$$

für

$$v = \frac{4K}{\eta}.$$

Es würde selbst schon von Wichtigkeit sein, den Werth der ganzen Zahl

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_{\mu-1})\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{\mu-1}}\right) = A$$

anzugeben. Die Ausrechnung ergiebt:

$$\begin{aligned}
\eta &= -1+2i, & A &= 1,\\
\eta &= 3+2i, & A &= 3+2i,\\
\eta &= -5+2i, & A &= (-1+2i)(-5+2i),\\
\eta &= -1+6i, & A &= -1+6i,\\
\eta &= 7-2i, & A &= 5(7-2i),\\
\eta &= -5+6i, & A &= -3(-5+6i),\\
\eta &= -1+10i, & A &= -1+10i.
\end{aligned}$$

Es ist mir nicht geglückt, in diesen Zahlen ein Gesetz zu entdecken.

Aus unseren Untersuchungen folgt auch oft ein Werth von $\pi(\alpha)$, ausgedrückt durch die Conjugirten $(\alpha,\ x)$ und ebenso durch die Conjugirten $\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)$. Daher besteht alsdann auch zwischen den beiden Grössen $(\alpha,\ x)$ und $\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)$ eine solche Beziehung, dass jede durch ein Product conjugirter Werthe der anderen darstellbar ist. Es kann daher $(\alpha,\ x)$ auch aus $\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)$

und umgekehrt durch „Composition" gebildet werden. Welche Folgerungen sich überhaupt für die „Composition" *Abel*scher Gleichungen aus dieser Darstellung durch die Resolventen ergeben, ist im allgemeinen ersichtlich. Jede *Abel*sche Gleichung mit complexen (aus $a+bi$ gebildeten) Coefficienten hat eine Resolvente, welche zunächst durch die $\pi(\alpha)$ und dann durch die (α, x) der Theilungsgleichungen ausgedrückt werden kann. Für vorliegende Abhandlung beschränke ich mich auf diesen Hinweis.

Es mögen jetzt einige Beispiele folgen.

1) $\eta = 3+2i$.

Hier hat man die Gleichung:

$$x_0^2 = x_0x_1+ix_0x_2+ix_1x_2.$$

Führen wir ein

$$(00) = x_0^2+x_1^2+x_2^2, \quad (01) = x_0x_1+x_1x_2+x_2x_0,$$
$$(000) = x_0^3+x_1^3+x_2^3, \quad (001) = x_0^2x_1+x_1^2x_2+x_2^2x_0,$$

so können wir aus obiger Gleichung leicht gewinnen:

$$(00) = (1+2i)(01); \quad (001) = (-1+2i)(002); \quad (000) = (-1+6i)(002).$$

Da nun

$$x_0x_1x_2 = -\varepsilon^3\sqrt[4]{\eta}, \quad \varepsilon^2 = i$$

gesetzt werden kann, so sind alle Coefficienten der Theilungsgleichung bestimmt. Setzen wir für $\alpha^3 = 1$

$$\pi(\alpha) = 2+i+2\alpha,$$

so ist $\pi(\alpha).\pi(\alpha^2) = \eta = 3+2i$, daher die Lösung:

$$\frac{(\alpha, x)^2}{(\alpha^2, x)} = -(1+i)\frac{\alpha^2+i}{\alpha+i}\cdot\frac{1}{\pi(\alpha^2)}\varepsilon\sqrt[4]{\eta^3},$$

$$(\alpha, x)^3 = -(1+i)^3\frac{\alpha^2+i}{\alpha+i}\cdot\pi(\alpha).\varepsilon^3\sqrt[4]{\eta}.$$

Ferner ergiebt sich

$$(\alpha^2, x)\left(\alpha, \frac{1}{x}\right) = 2i\alpha\frac{1}{\alpha^2+i}\cdot\pi(\alpha^2) = -2i(1+2i+(1+i)\alpha)$$

und als „Composition":

$$\left(\alpha, \frac{1}{x}\right) = \frac{1+i}{i+\alpha}\frac{(\alpha^2, x)}{(\alpha, x)}\varepsilon^3\sqrt[4]{\eta}.$$

2) $\eta = -5+2i$.

Setzen wir wieder — und allgemein:

$$(00) = x_0^2+x_1^2+\cdots+x_{\mu-1}^2,$$
$$(01) = x_0x_1+x_1x_2+\cdots+x_{\mu-1}x_1,$$
$$(0m) = x_0x_m+x_1x_{m+1}+\cdots+x_{\mu-1}x_{m+\mu-1},$$

so erhalten wir

$$(02) = -(01),\quad (03) = -3(01),\quad (00) = (1+2i)(01).$$

Hieraus folgt $f_2 = -3(01)$, $f_1^2 = (-5+2i)(01)$.

Für die analogen Grössen:

$$(\alpha\beta\gamma) = x_\alpha x_\beta x_\gamma+x_{1+\alpha}x_{1+\beta}x_{1+\gamma}+\cdots+x_{\mu-1+\alpha}x_{\mu-1+\beta}x_{\mu-1+\gamma}$$

finden wir:

$$(1+2i)(000) = (-15+4i)(014), \qquad (012) = (1+2i)(014),$$
$$(1+2i)(001) = (-5-6i)(014), \qquad (1+2i)(013) = (3-2i)(014),$$
$$(002) = (1-2i)(014), \qquad (015) = -(014),$$
$$(1+2i)(003) = (3-6i)(014), \qquad (1+2i)(024) = 3(014).$$
$$(004) = (1-2i)(014),$$
$$(1+2i)(005) = (-5-2i)(014),$$
$$(1+2i)(006) = (3+2i)(014),$$

Hieraus folgt $(1+2i)f_1^3 = \eta^2(014)$, $f_3 = (3+2i)\frac{f_1^3}{\eta^2}$. Man sieht, dass man alle Coefficienten der Theilungsgleichung hiernach berechnen kann. Doch ist das Verfahren sehr mühsam*). Schon für die Grössen $(\alpha\beta\gamma)$ beträgt die Anzahl der *selbständigen*, also zu berechnenden:

$$E\left(\frac{\mu^2+3\mu+2}{6}\right).$$

Gehen wir nun zur Bildung der Resolventen über, so finden wir zwischen den $y(\alpha)$ die Gleichungen:

$$y_3(1-\alpha^4)-iy_1-\alpha iy_2 = 0,$$
$$y_1(\alpha^4+\alpha^5)+\alpha^3y_3-y_2 = 0,$$
$$y_2+i\alpha y_1+i\alpha y_3+\alpha y_0 = 0.$$

Setzen wir nun

$$\pi(\alpha) = i+\alpha^2+\alpha^4,\quad \alpha^7 = 1,$$

*) Vgl. die verhältnissmässig einfache Methode (dieses Journal Bd. 110, S. 49) durch Lösung eines Systems von Congruenzen.

so wird:

$$(\alpha,\ x)(\alpha^6,\ x) = 2(\alpha^3+\alpha^4)\pi(\alpha)\pi(\alpha^6).\sqrt{\eta};$$

$$\frac{(\alpha,\ x)^2}{(\alpha^2,\ x)f} = (1+i)\frac{\alpha^2-\alpha^6 i}{(1-\alpha i)^2(1-\alpha^5 i)}\cdot\frac{\pi(\alpha^6)}{\pi(\alpha^2)\pi(\alpha^3)\pi(\alpha^5)};$$

$$\frac{(\alpha,\ x)(\alpha^2,\ x)}{(\alpha^3,\ x)f} = (1+i)\frac{1}{(1-\alpha^2 i)(1-\alpha^5 i)}\cdot\frac{1}{\pi(\alpha^3)\pi(\alpha^4)};$$

$$(\alpha,\ x)^7 = (1+i)^7 f^7\cdot\frac{e^7(\alpha^4)}{e^6(\alpha)e^3(\alpha^2)e^2(\alpha^3)e^5(\alpha^4)e^4(\alpha^5)e(\alpha^6)}$$

$$\times\frac{\pi^7(\alpha^6)}{\pi^6(\alpha^6)\pi^3(\alpha^5)\pi^2(\alpha^4)\pi^5(\alpha^3)\pi^4(\alpha^2)\pi(\alpha)};$$

$$e(\alpha) = 1-\alpha i;\quad f = \sqrt[4]{-\eta^3}.$$

Diese Gleichungen vollziehen die Theilung der Periode durch $\eta = -5+2i$. Man hat endlich

$$(\alpha^6,\ x)\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right) = -2(i+(1+i)\alpha+\alpha^2)\cdot\frac{\eta}{\pi(\alpha^4)}\cdot$$

3) $\eta = -1+6i$.

Es genüge, hier ganz kurz das Endergebniss mitzutheilen:

Die Gleichungen $(g = 2)$ sind:

$$x_0x_5+x_0x_3+ix_5x_2-ix_2x_3 = 0,$$
$$x_3x_1+x_1x_2+x_0x_2-x_0x_5 = 0,$$
$$x_0x_1-x_6x_8+ix_1x_8-ix_0x_6 = 0,$$
$$x_0^2+x_0x_5+ix_5x_3-ix_0x_3 = 0.$$

Daraus folgen:

$$(01) = -(02);\quad (03) = (1+2i)(02);\quad (04) = (1-4i)(02);\quad (00) = (-3+4i)(02);$$
$$f_2 = (2-2i)(02);\quad (02) = -i\sqrt{\eta};$$
$$(\alpha,\ x)(\alpha^2,\ x) = -2i\eta\sqrt{\eta},\quad \text{für}\quad \alpha^3 = 1.$$

Ferner, wenn man kurz setzt:

$$(0n)' = \sum_r \frac{1}{x_r x_{r+n}},$$

$$(03)' = -(04)';\quad (01)' = (1+2i)(04)';\quad (02)' = (-1+2i)(04)';$$
$$(00)' = (-1-2i)(04)';$$
$$\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)\left(\alpha^2,\ \frac{1}{x}\right) = -2i(3-2i)\sqrt{\eta};\quad \text{für } \alpha^3 = 1.$$

Endlich, wenn wir kurz setzen

$$\left(\frac{0}{n}\right) = \sum_r \frac{x_r}{x_{r+n}},$$

$$(\tfrac{0}{0}) = 9,\quad (\tfrac{0}{1}) = 1+2i,\quad (\tfrac{0}{2}) = -3,\quad (\tfrac{0}{3}) = 3+4i,\quad (\tfrac{0}{4}) = 1,\quad (\tfrac{0}{5}) = -5-2i,$$
$$(\tfrac{0}{6}) = -1+4i,\quad (\tfrac{0}{7}) = -3+4i,\quad (\tfrac{0}{8}) = -3-6i.$$

Hieraus folgt:

$$(\alpha^{-1},\ x)(\alpha,\ x^{-1}) = \eta(1-2i+\alpha+(-1+2i)\alpha^2) \quad \text{für} \quad \alpha^3 = 1.$$

Diese letzte Gleichung bestätigt durch Multiplication die beiden ersten, da man für

$$(\alpha,\ x)(\alpha^2,\ x)\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)\left(\alpha^2,\ \frac{1}{x}\right)$$

beide Male denselben Werth findet. Also ist zweifellos festgestellt, dass $\left(\alpha, \frac{1}{x}\right)$ nicht allein Primtheiler von $\eta = -1+6i$, sondern auch von $3-2i$ enthält, während (α, x) der Analogie der Kreistheilung folgend, nur Primtheiler von η besitzt. Da mir diese Eigenschaft von höchster Bedeutung für die hier in Frage kommende Composition zu sein schien, habe ich auch für $\eta = -5+6i$, $q = 61$ die Rechnungen durchgeführt. Hier ergiebt sich in den obigen Bezeichnungen:

$$(01) = (1+2i)(04);\quad (02) = -3(04);\quad (03) = (3+2i)(04);\quad (05) = -3(04);$$
$$(06) = -(3+2i)(04);\quad (07) = -3(04);\quad (00) = (9+2i)(04).$$

Daher

$$f_2 = \sum_{r,s} x_r x_s = (-7+2i)(04);\quad f_1^2 = \eta(04),$$
$$(\alpha,\ x)(\alpha^2,\ x) = 16(04).$$

Für (04) erhielt ich den Werth $(04) = \sqrt{\eta}$. Der Factor 16 statt 2 ist auffallend. Noch seltsamer ist aber:

$$(1-2i)(02)' = (1+4i)(01)';\quad (03)' = -(01)';\quad (1-2i)(04)' = (01)';$$
$$(1-2i)(05)' = (-1-2i)(01)';\quad (1-2i)(06)' = 3(01)';\quad (1-2i)(07)' = (01)';$$
$$(1-2i)(00)' = (-1-4i)(01)'.$$

Daraus folgt:

$$\left(\alpha,\ \frac{1}{x}\right)\cdot\left(\alpha^2,\ \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha^3 = 1.$$

Dies sonderbare Ergebniss wird durch $(\alpha^{-1}, x)(\alpha, x^{-1})$ bestätigt. Für jetzt mag es genügen, auf diese räthselhaften Erscheinungen hingewiesen zu haben.

Die Richtigkeit meiner Rechnungen kann ich verbürgen, da ich auf ganz verschiedenen Wegen — durch Auflösung linearer Gleichungen und durch Kettenbruchentwicklung — meine Zahlen für $\sum_r \frac{x_r}{x_{r+n}}$ erhalten habe.

§ 6.

Fortsetzung. Anwendung auf die Primzahlen $q = 8m+1$.

Es sei q eine solche Primzahl, deren einer complexer primärer Theiler η. Ferner sei ε eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^{q-1} = 1. \tag{22.}$$

Betrachten wir die Resolvente:

$$[\varepsilon, \delta] = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \cdots + \varepsilon^{q-2}\delta_{q-2},$$

so wird der Coefficient von δ_0 werden $\left(\mu = \frac{q-1}{4}\right)$:

$$1 + \varepsilon^\mu i + \varepsilon^{2\mu} i^2 + \varepsilon^{3\mu} i^3.$$

Dieser verschwindet, wenn $\varepsilon^\mu = i$ ist, er wird gleich 4, wenn

$$\varepsilon^\mu = -i. \tag{23.}$$

Daher machen wir die letztere Voraussetzung. Nun soll (ε, δ) den Sinn haben

$$(\varepsilon, \delta) = \delta_0 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \cdots + \delta_{\mu-1}\varepsilon^{\mu-1}. \tag{24.}$$

Wir wollen jetzt das Product ins Auge fassen:

$$(\varepsilon^h, \delta)(\varepsilon^k, \delta^{-1})).$$

Wir bilden es in der bekannten cyklischen Weise.

Dann ist:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^h, \delta)(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = {} & 1 + \varepsilon^{h+k} + \varepsilon^{2(h+k)} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)} \\ & + \varepsilon^k\left(\frac{\delta_0}{\delta_1} + \varepsilon^{h+k}\frac{\delta_1}{\delta_2} + \varepsilon^{2(h+k)}\frac{\delta_2}{\delta_3} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)}\frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_0}\right) \\ & + \varepsilon^{2k}\left(\frac{\delta_0}{\delta_2} + \varepsilon^{h+k}\frac{\delta_1}{\delta_3} + \varepsilon^{2(h+k)}\frac{\delta_2}{\delta_4} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)}\frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_1}\right) \\ & + \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ & + \varepsilon^{(\mu-1)k}\left(\frac{\delta_0}{\delta_{\mu-1}} + \varepsilon^{h+k}\frac{\delta_1}{i\delta_0} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)}\frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_{\mu-2}}\right).\end{aligned}$$

Aber dies gilt nur unter der Voraussetzung, dass

$$\varepsilon^{\mu k} = i \tag{25.}$$

ist. Die Grössen:

$$\frac{\delta_0}{\delta_1},\ \frac{\delta_1}{\delta_2},\ \ldots,\ \frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_0};\ \frac{\delta_0}{\delta_2},\ \frac{\delta_1}{\delta_3},\ \ldots,\ \frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_1};\ \text{u. s. w.}$$

sind nämlich cyklisch. Ihre Summe ist eine ganze Zahl. Verschieben wir in unseren Klammerausdrücken die Indices jeden um Eins, so wird sich der erste verwandeln in:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}+\varepsilon^{h+k}\frac{\delta_2}{\delta_3}+\cdots+\varepsilon^{(\mu-1)(h+k)}\frac{i\delta_0}{i\delta_1}.$$

Dieser Ausdruck darf sich von dem ursprünglichen nur durch einen Factor, der eine Potenz von ε ist, unterscheiden; denn sonst ist er als Resolvente nicht brauchbar. Er wird aber nur durch den Factor $\varepsilon^{-(h+k)}$ von dem ursprünglichen verschieden, wenn $\varepsilon^{\mu(h+k)}=1$ ist.

Dies ist eine aus (23.) und (25.) folgende Gleichung. Ist insbesondere

$$\varepsilon^{h+k} = 1,$$

so werden die Klammergrössen *ganze Zahlen*, die wir durch z_r bezeichnen wollen. Es ist also:

$$(\varepsilon^h,\ \delta)(\varepsilon^{-h},\ \delta^{-1}) = \mu+\varepsilon^k z_1+\varepsilon^{2k}z_2+\cdots+\varepsilon^{(\mu-1)k}z_{\mu-1}.$$

Mit Hülfe der Congruenz:

$$z_r \equiv -\tfrac{1}{4}g^{-r}\ (\text{mod.}\,\eta)$$

ergiebt sich nun, genau wie im vorigen Falle, dass für den Primtheiler $\pi(\varepsilon)$ von η, welcher der Congruenz genügt:

$$\pi(g) \equiv 0\ (\text{mod.}\,q),$$

das Folgende gilt:

Die ganze Zahl $(\varepsilon^h, \delta)(\varepsilon^{-h}, \delta^{-1})$ *ist theilbar durch* $\frac{\eta}{\pi(\varepsilon^{-h})}$. Gehen wir zu den allgemeinen Grössen

$$(\varepsilon^h,\ \delta)(\varepsilon^k,\ \delta^{-1})$$

über, für welche nur die Bedingungen (23.) und (25.) erfüllt sind. Mit Hülfe der Gleichungen (9.):

$$i\frac{\delta_{\text{ind}\varrho}}{\delta_0}+\frac{\delta_{\text{ind}\sigma}}{\delta_0} = \frac{\delta_{\text{ind}\varrho}}{\delta_{\text{ind}\tau}}+i\frac{\delta_{\text{ind}\sigma}}{\delta_{\text{ind}\tau}}$$

kann man alle Grössen

$$y_r(\varepsilon^m) = \sum_n \varepsilon^{mn}\frac{\delta_n}{\delta_{n+r}}$$

auf eine einzige, etwa $y_1(\varepsilon^m)$, linear zurückführen.

Man findet also

$$(26.) \qquad (\varepsilon^k, \delta)(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = \varphi(\varepsilon) y_1(\varepsilon^m);$$

$\varphi(\varepsilon)$ ist eine complexe Zahl mit *rationalen* Coefficienten.

Die Lösung der Theilungsgleichungen gestaltet sich nun so, dass man die y bestimmt. Da jede Grösse y in eine gewisse Potenz erhoben in den ε ganzzahlig wird, — wie wir oben sahen —, so erhält man aus den conjugirten Werthen eines der y, etwa des $y_1(\varepsilon)$, unter Hinzunahme der ganzen Zahl

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{\delta_2} + \cdots + \frac{\delta_{\mu-1}}{i\delta_0}$$

den Werth jedes der Quotienten $\frac{\delta_m}{\delta_{m+1}}$. Da Gleiches für jedes y, also für jeden Quotienten gilt, so ist die Aufgabe als gelöst anzusehen, denn es ist z. B. δ_0^4 bestimmbar aus

$$\frac{\delta_{\text{ind}(-1+2i)}}{\delta_0} = \frac{\delta_0^4 + (-1+2i)}{1+(-1+2i)\delta_0^4}.$$

Es ist vorläufig nicht möglich, die Zusammengehörigkeit der conjugirten $y_1(\varepsilon)$, $y_1(\varepsilon^2)$, ..., $y_1(\varepsilon^{\mu-1})$ *von vornherein* so anzugeben, dass durch eines derselben die anderen rational darstellbar sind. In den Beispielen gelang die Auffindung dieses Zusammenhanges durch Betrachtung der Resolventen (ε, δ). Das Nähere mögen die von mir genauer studirten Fälle $q = 17$ und $q = 41$ ergeben.

$\eta = 1+4i$, $q = 17$. (Siebzehntheilung).

Man findet die Dreiheiten: $(g = 10)$.

$$\tau = 14,\ 5; \quad \text{ind}\,\tau = 3,\ 7;$$
$$\varrho = 8,\ 11; \quad \text{ind}\,\varrho = 14,\ 13;$$
$$\sigma = 7,\ 12; \quad \text{ind}\,\sigma = 9,\ 15.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$(27.) \qquad \begin{cases} \delta_3\delta_2 - \delta_3\delta_1 + i\delta_0\delta_1 + i\delta_0\delta_2 = 0, \\ \delta_3^2 + i\delta_1\delta_3 + i\delta_0\delta_1 - \delta_0\delta_3 = 0. \end{cases}$$

Die cyklischen Grössen sind:

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_3} - i\frac{\delta_3}{\delta_0} = z_1,$$

$$\frac{\delta_0}{\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_3} - i\frac{\delta_2}{\delta_0} - i\frac{\delta_3}{\delta_1} = z_2,$$

$$\frac{\delta_0}{\delta_3} - i\frac{\delta_1}{\delta_0} - i\frac{\delta_2}{\delta_1} - i\frac{\delta_3}{\delta_2} = z_3.$$

Zwischen diesen Grössen erhält man aus (27.) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -z_3+z_2+z_1+z_2 &= 0, \\ z_2+4+z_3+iz_1 &= 0, \\ z_1+iz_3+z_2+4i &= 0. \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen oder durch die Kettenbruchmethode findet man:

$$z_1 = 1-i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -3-i.$$

In der That ist nach der Kettenbruchmethode z. B.

$1+4i = -2(-1-2i)-1$; $B = -2$, $A = 2$, $\operatorname{ind}(1+i) = 7$, $\operatorname{ind}(-1-2i) = 14$.
Daher

$$\Sigma\frac{\delta_7}{\delta_{14}} = \frac{1}{i}\Sigma\frac{\delta_0}{\delta_3} = -1+3i; \quad z_3 = \Sigma\frac{\delta_0}{\delta_3} = -3-i.$$

Betrachten wir nun die Resolventen ($\varepsilon^4 = -i$):

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \delta) &= \delta_0+\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\varepsilon^3\delta_3, \\ (\varepsilon^{-1}, \delta^{-1}) &= \delta_0^{-1}+\varepsilon^{-1}\delta_1^{-1}+\varepsilon^{-2}\delta_2^{-1}+\varepsilon^{-3}\delta_3^{-1}, \end{aligned}$$

dann wird:

$$(28.)\qquad (\varepsilon, \delta)(\varepsilon^{-1}, \delta^{-1}) = \varepsilon i z_3+\varepsilon^2 i z_2+\varepsilon^3 i z_1+4.$$

Die rechte Seite ist mod. η congruent mit

$$g^4(1+\varepsilon g+\varepsilon^2 g^2+\varepsilon^3 g^3),$$

wird daher mit Null congruent durch die Annahmen

$$\varepsilon \equiv g^3, \quad g^7, \quad g^{11}, \quad \text{nicht aber für} \quad \varepsilon \equiv g^{15}.$$

Setzen wir also

$$\pi(\varepsilon) = 1+\varepsilon+\varepsilon^5,$$

so hat die rechte Seite von (28.) die Primfactoren $\pi(\varepsilon^3)$, $\pi(\varepsilon^7)$, $\pi(\varepsilon^{11})$, nicht aber $\pi(\varepsilon^{15})$. In der That ist

$$(28^a.)\qquad (\varepsilon, \delta)(\varepsilon^{-1}, \delta^{-1}) = (1+i)(1+\varepsilon)(-1+\varepsilon^3).\pi(\varepsilon^3)\pi(\varepsilon^7)\pi(\varepsilon^{11}).$$

Unseren obigen Bezeichnungen entsprechend setzen wir nun:

$$\begin{aligned} y_1(\varepsilon^m) &= \frac{\delta_0}{\delta_1}+\varepsilon^m\frac{\delta_1}{\delta_2}+\varepsilon^{2m}\frac{\delta_2}{\delta_3}+\varepsilon^{3m}\frac{\delta_3}{i\delta_0}, \\ y_2(\varepsilon^m) &= \frac{\delta_0}{\delta_2}+\varepsilon^m\frac{\delta_1}{\delta_3}+\varepsilon^{2m}\frac{\delta_2}{i\delta_0}+\varepsilon^{3m}\frac{\delta_3}{i\delta_1}, \\ y_3(\varepsilon^m) &= \frac{\delta_0}{\delta_3}+\varepsilon^m\frac{\delta_1}{i\delta_0}+\varepsilon^{2m}\frac{\delta_2}{i\delta_1}+\varepsilon^{3m}\frac{\delta_3}{i\delta_2}, \end{aligned}$$

dann erhält man aus (27.) die folgenden Gleichungen:

$$-\frac{\delta_1}{\delta_0}+\frac{\delta_2}{\delta_0}+i\frac{\delta_2}{\delta_3}+i\frac{\delta_1}{\delta_3} = 0,$$

$$-\frac{\delta_3}{\delta_2}+\frac{\delta_3}{\delta_1}+i\frac{\delta_0}{\delta_1}+i\frac{\delta_0}{\delta_2} = 0,$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_1}+i+i\frac{\delta_0}{\delta_3}-\frac{\delta_0}{\delta_1} = 0,$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_0}+i\frac{\delta_1}{\delta_0}+i\frac{\delta_1}{\delta_2}-1 = 0.$$

Verschieben wir in diesen Gleichungen die Indices um je eine Einheit und multipliciren der Reihe nach mit 1, ε^m, ε^{2m}, ε^{3m}, so folgt durch Addition:

$$(29.)\qquad \begin{cases} y_3(\varepsilon^m) = (1+\varepsilon^{3m})y_2(\varepsilon^m)+\varepsilon^{3m}y_1(\varepsilon^m), \\ y_3(\varepsilon^m) = -\varepsilon^m y_2(\varepsilon^m)-iy_1(\varepsilon^m). \end{cases}$$

Aus den *vier* obigen Gleichungen entstehen, (27.) entsprechend, nur *zwei* wesentlich verschiedene für die $y(\varepsilon^m)$. Damit die obige Verschiebung möglich sei, war nothwendig $\varepsilon^{4m} = 1$ anzunehmen. Aber für $\varepsilon^m = 1$ sind die Gleichungen (29.) nicht gültig, wohl aber für $\varepsilon^m = i$, $-i$, -1. Es ergiebt sich:

Für $\varepsilon^m = i$ wird $y_3 = -iy_1$; $y_2 = 0$,

„ $\varepsilon^m = -i$ „ $y_3 = (2-i)y_1$; $y_2 = -2iy_1$,

„ $\varepsilon^m = -1$ „ $y_3 = -y_1$; $y_2 = (-1+i)y_1$.

Nun ist:

$$(\varepsilon^h, \delta)(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = \varepsilon^k y_1(\varepsilon^{h+k})+\varepsilon^{2k}y_2(\varepsilon^{h+k})+\varepsilon^{3k}y_3(\varepsilon^{h+k}),$$
$$\text{wo}\quad \varepsilon^{4h} = -i,\quad \varepsilon^{4k} = i,\quad \varepsilon^4 = -i.$$

Nun findet man

$$(\varepsilon, \delta)(\varepsilon^3, \delta^{-1}) = \varepsilon^3(1+\varepsilon)^2.\pi(\varepsilon^7)\pi(\varepsilon^{11}).y_1(-i),$$

folglich

$$(\varepsilon^5, \delta)(\varepsilon^{15}, \delta^{-1}) = \varepsilon^{15}(1+\varepsilon^5)^2.\pi(\varepsilon^3)\pi(\varepsilon^7).y_1(-i),$$

$$(\varepsilon^{13}, \delta)(\varepsilon^7, \delta^{-1}) = \varepsilon^7(1+\varepsilon^{13})^2.\pi(\varepsilon^{11})\pi(\varepsilon^{15}).y_1(-i),$$

$$(\varepsilon^9, \delta)(\varepsilon^{11}, \delta^{-1}) = \varepsilon^{11}(1+\varepsilon^9)^2.\pi(\varepsilon^{15})\pi(\varepsilon^3).y_1(-i).$$

Hieraus folgt durch Multiplication, mit Rücksicht auf (28^a.),

$$(30.)\qquad y_1(-i) = \frac{\delta_0}{\delta_1}-i\frac{\delta_1}{\delta_2}-\frac{\delta_2}{\delta_3}+\frac{\delta_3}{\delta_0} = (1+i)\sqrt[4]{1+4i}.$$

Weiter ergiebt sich

$$(\varepsilon, \delta)(\varepsilon^{11}, \delta^{-1}) = \varepsilon^5(1+\varepsilon^6)y_1(i),$$

$$(\varepsilon, \delta)(\varepsilon^7, \delta^{-1}) = -\varepsilon^7(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^{13})\pi(\varepsilon^{11}).y_1(-1),$$

wo wir auch die verschiedenen Werthe von ε verwenden können, wie oben für $y_1(-i)$. Nun folgt aus den Gleichungen

$$(\varepsilon,\ \delta)(\varepsilon^3,\ \delta^{-1}) = \varepsilon^3(1+\varepsilon)^2\pi(\varepsilon^7)\pi(\varepsilon^{11}).y_1(-i),$$
$$(\varepsilon^{13},\ \delta)(\varepsilon^{15},\ \delta^{-1}) = \varepsilon(1-\varepsilon^{14}).y_1(i)$$

durch Multiplication

$$(31.)\qquad y_1(i)y_1(-i) = 2i(1+4i);$$

ebenso aus

$$(\varepsilon,\ \delta)(\varepsilon^{11},\ \delta^{-1})(\varepsilon^{13},\ \delta)(\varepsilon^{15},\ \delta^{-1}) = \varepsilon^6(1-i)y_1^2(i),$$
$$(\varepsilon^{11},\ \delta^{-1})(\varepsilon^{13},\ \delta) = -\varepsilon^{11}(1+\varepsilon^9)(1+\varepsilon^{13})\pi(\varepsilon^{15})y_1(-1):$$

$$(32.)\qquad y_1^2(i) = (-1+i)\eta y(-1).$$

Setzen wir also $t^4 = 1+4i$ und $y_1(-i) = (1+i)t$, so wird

$$y_1(-i) = (1+i)t,\quad y_1(-1) = (1+i)t^2,\quad y_1(i) = (1+i)t^3.$$

Daher hat man: $t^4 = 1+4i$ und

$$\frac{\delta_0}{\delta_1}+\frac{\delta_1}{\delta_2}+\frac{\delta_2}{\delta_3}+\frac{\delta_3}{i\delta_0} = 1-i = z_1,$$
$$\frac{\delta_0}{\delta_1}+i\frac{\delta_1}{\delta_2}-\frac{\delta_2}{\delta_3}-\frac{\delta_3}{\delta_0} = (1+i)t^3,$$
$$\frac{\delta_0}{\delta_1}-\frac{\delta_1}{\delta_2}+\frac{\delta_2}{\delta_3}+i\frac{\delta_3}{\delta_0} = (1+i)t^2,$$
$$\frac{\delta_0}{\delta_1}-i\frac{\delta_1}{\delta_2}-\frac{\delta_2}{\delta_3}+\frac{\delta_3}{\delta_0} = (1+i)t.$$

Hierdurch finden wir die Quotienten der δ, der Wurzeln der Theilungsgleichung, und dann durch eine reine Gleichung 4ten Grades, wie wir oben sahen, die δ selbst.

Diese ausführlichere Darstellung kann sehr wohl genügend erscheinen, um durch das Beispiel die allgemeine Theorie zu erklären. Ausserdem rechtfertigt sie sich durch die Berühmtheit der Aufgabe und die Neuheit und Einfachheit der Lösung. Gehen wir zum folgenden Beispiel über:

$$\eta = 5+4i,\quad q = 41,\quad g = 11.$$

Die Dreiheiten sind:

τ =	2,	3,	4,	5,	12,
ϱ =	6,	11,	16,	21,	15,
σ =	38,	34,	30,	26,	39.
indτ =	22,	5,	4,	34,	9,
indϱ =	27,	1,	8,	18,	39,
indσ =	25,	33,	21,	19,	2.

Die Gleichungen werden:

$$(33.)\quad \begin{cases} \delta_7\delta_0+i\delta_5\delta_0+i\delta_7\delta_2+\delta_5\delta_2 = 0, \\ \delta_1\delta_0+\delta_3\delta_0-i\delta_1\delta_5+i\delta_3\delta_5 = 0, \\ \delta_0\delta_8+\delta_4\delta_1-i\delta_0\delta_1-i\delta_4\delta_8 = 0, \\ \delta_4\delta_8-\delta_0\delta_8-i\delta_4\delta_9-i\delta_0\delta_9 = 0, \\ \delta_9^2+\delta_9\delta_2+i\delta_0\delta_9-i\delta_0\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen oder mit Hülfe der Kettenbruchmethode findet man die Werthe:

$$z_n = \sum_0^9 m\frac{\delta_m}{\delta_{m+r}}.$$

Sie sind:

$$z_1 = -5-i,\quad z_2 = 4i,\quad z_3 = 3+5i,\quad z_4 = -2i,\quad z_5 = 3-3i,$$
$$z_6 = -4+6i,\quad z_7 = 3+i,\quad z_8 = -2+2i,\quad z_9 = 3-i.$$

Nun wird für $\varepsilon^{10} = -i$ sofort:

$$(\varepsilon^5,\ \delta)(\varepsilon^{35},\ \delta^{-1}) = (1+i)(1+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{25})(5+4i).$$

Es ist nun ein Leichtes, die Grösse $(\varepsilon,\ \delta)(\varepsilon^{39},\ \delta^{-1})$ niederzuschreiben. Nach Abscheidung der Factoren $1+i$ und $\frac{\eta}{\pi(\varepsilon^{-1})}$ für $\pi(\varepsilon) = 1+\varepsilon^9+\varepsilon^{17}$ bleibt die complexe Zahl

$$\varphi(\varepsilon) = -1-i+\varepsilon+i\varepsilon^3+(-1+i)\varepsilon^4-i\varepsilon^5+\varepsilon^7+(-1+i)\varepsilon^8-\varepsilon^9.$$

Bildet man die Norm derselben, so findet man

$$\varphi(\varepsilon).\varphi(\varepsilon^{21}) = 2i(i+i\varepsilon^2-(1+i)\varepsilon^4).$$

Der Klammerfactor hat die Norm $-i(5-4i)$. Daher hat $(\varepsilon,\ \delta)(\varepsilon^{39},\ \delta^{-1})$ einen Primtheiler von $5-4i$.

Um die Untersuchung weiter zu führen, hätte man nun

$$(\varepsilon^h,\ \delta)(\varepsilon^k,\ \delta^{-1})$$

zu bilden für die verschiedenen Werthe h, k, welche den Bedingungen

$$\varepsilon^{10h} = -i,\quad \varepsilon^{10k} = i$$

genügen. Sie werden linear ausgedrückt durch $y_1(\varepsilon^{h+k})$ und zwar in der Form

$$(\varepsilon^h,\ \delta)(\varepsilon^k,\ \delta^{-1}) = R_{h,k}.y_1(\varepsilon^{h+k}),$$

wo $R_{h,k}$ eine rationale Function von ε ist. Man kann dann die Ausdrücke derartig behandeln, dass $y_1(\varepsilon^4)$ als 10te Wurzel aus einer ganzen complexen Zahl erscheint.

Zur Theorie des *Gauss*schen Krümmungsmaasses.

(Von Herrn *P. Stäckel* in Halle a. S.)

Das Verfahren, welches *Gauss* in den Disquisitiones generales circa superficies curvas angewandt hat, um den *Euler*schen Satz über die Krümmung der Normalschnitte herzuleiten, führt zu einem einfachen Beweise für die Erhaltung des Krümmungsmaasses einer Fläche bei ihren Biegungen.

Sind P und Π entsprechende Punkte zweier Flächen, die durch Biegung in einander übergeführt werden können, so kann man durch Bewegung einer dieser Flächen erreichen, dass diese beiden Punkte und die Flächennormalen in ihnen zusammenfallen, und dann durch eine Drehung um die gemeinschaftliche Normale bewirken, dass auch entsprechende Tangenten in P und Π zur Deckung gelangen. Wie bei *Gauss* werde nun die erste Fläche in der Nähe von P durch

$$z = \tfrac{1}{2}c_{20}x^2 + c_{11}xy + \tfrac{1}{2}c_{02}y^2 + \cdots$$

dargestellt. Entspricht dem Punkte x, y, z auf der gebogenen Fläche der Punkt ξ, η, ζ, so ist analog in der Nähe von Π:

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\gamma_{20}\xi^2 + \gamma_{11}\xi\eta + \tfrac{1}{2}\gamma_{02}\eta^2 + \cdots,$$

und in Folge der Voraussetzungen über die gegenseitige Lage der beiden Flächen ist nothwendig:

$$\xi = x + \tfrac{1}{2}\alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \tfrac{1}{2}\alpha_{02}y^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_{30}x^3 + \tfrac{1}{2}\alpha_{21}x^2y + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}xy^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_{03}y^3 + \cdots$$
$$\eta = y + \tfrac{1}{2}\beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \tfrac{1}{2}\beta_{02}y^2 + \tfrac{1}{6}\beta_{30}x^3 + \tfrac{1}{2}\beta_{21}x^2y + \tfrac{1}{2}\beta_{12}xy^2 + \tfrac{1}{6}\beta_{03}y^3 + \cdots.$$

Die Vergleichung von $dx^2 + dy^2 + dz^2$ und $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ ergiebt dann, wenn x und y als unabhängige Variable angesehen werden, dass ξ und η keine Glieder zweiter Ordnung enthalten dürfen, und durch die Glieder dritter Ordnung erhält man daher als Coefficienten von y^2dx^2, $2xy\,dx\,dy$, x^2dy^2:

$$c_{11}^2 = \alpha_{12}+\gamma_{11}^2, \quad c_{11}^2+c_{20}c_{02} = \alpha_{12}+\beta_{21}+\gamma_{11}^2+\gamma_{20}\gamma_{02}, \quad c_{11}^2 = \beta_{21}+\gamma_{11}^2,$$

woraus sofort die Relation

$$c_{20}c_{02}-c_{11}^2 = \gamma_{20}\gamma_{02}-\gamma_{11}^2$$

entspringt, welche mit dem zu beweisenden Satze identisch ist.

Berücksichtigt man bei den Reihenentwickelungen noch höhere Potenzen von x und y, so erhält man folgendes Resultat. Es sei in der Nähe von P:

$$z = \tfrac{1}{2}c_{20}x^2+c_{11}xy+\tfrac{1}{2}c_{02}y^2+\tfrac{1}{6}c_{30}x^3+\tfrac{1}{2}c_{21}x^2y+\tfrac{1}{2}c_{12}xy^2+\tfrac{1}{6}c_{03}y^3+\cdots,$$

und in der Nähe von Π:

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\gamma_{20}\xi^2+\gamma_{11}\xi\eta+\tfrac{1}{2}\gamma_{02}\eta^2+\tfrac{1}{6}\gamma_{30}\xi^3+\tfrac{1}{2}\gamma_{21}\xi^2\eta+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}\xi\eta^2+\tfrac{1}{6}\gamma_{03}\eta^3+\cdots.$$

Die Vergleichung von $dx^2+dy^2+dz^2$ und $d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$ ergiebt dann für die Coefficienten der Reihenentwickelungen von ξ und η nach x und y lineare Gleichungen, welche mit einander verträglich nur sind, wenn zwischen den Coefficienten $c_{\varkappa\lambda}$ und $\gamma_{\varkappa\lambda}$ der Reihenentwickelungen von z und ζ gewisse Relationen bestehen. Und zwar stellt sich heraus, dass die Coefficienten der Glieder der Dimension $n+1$ von ξ und η eindeutig bestimmt sind, wenn zwischen den Coefficienten der Glieder der Dimension n von z und ζ genau $n-1$ von einander unabhängige Relationen stattfinden, in denen ausserdem die Coefficienten der vorhergehenden Glieder auftreten. Im besonderen ergiebt sich für $n = 2$ das *Gauss*sche Krümmungsmaass:

$$c_{20}c_{02}-c_{11}^2 = \gamma_{20}\gamma_{02}-\gamma_{11}^2,$$

und für $n = 3$ findet man die Relationen:

$$c_{20}c_{12}-2c_{11}c_{21}+c_{02}c_{30} = \gamma_{20}\gamma_{12}-2\gamma_{11}\gamma_{21}+\gamma_{02}\gamma_{30},$$
$$c_{20}c_{03}-2c_{11}c_{12}+c_{02}c_{21} = \gamma_{20}\gamma_{03}-2\gamma_{11}\gamma_{12}+\gamma_{02}\gamma_{21},$$

welche besagen, dass auch der erste *Beltrami*sche Differentialparameter des *Gauss*schen Krümmungsmaasses eine Biegungsinvariante ist.

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

V. Artikel. Zusammenfassung und wichtige Specialfälle.

Hierzu Tafel I, Fig. 1—9.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

Die *projectiv-trilineare* Verwandtschaft ebener Systeme, welche in den vorangegangenen Artikeln*) stets nur in ihrer allgemeinsten Form ins Auge gefasst worden ist, bietet eine grosse Mannigfaltigkeit von Sonderfällen dar, bei welchen sich die für den allgemeinen Fall gefundenen Eigenschaften mehr oder weniger modificiren. Wenn auch nicht die Absicht bestehen kann, diese Sonderfälle alle ins einzelne zu verfolgen, so ist es doch unerlässlich, wenigstens die Haupttypen einer kurzen Betrachtung zu unterziehen. Es erscheint hierfür erforderlich, eine übersichtliche Zusammenstellung der Haupteigenschaften der allgemeinen Verwandtschaft in § 1 vorauszuschicken. Hieran schliesst sich dann in § 2 eine kurze Skizzirung der Haupteigenschaften der *sectiv*-trilinearen Verwandtschaft. Sie ergeben sich, soweit sie sich nicht auf unendlich ferne Elemente beziehen, aus denjenigen der *projectiv*-trilinearen Verwandtschaft durch reciproke Umformung. In § 3 bis § 5 folgt hierauf die Vorführung von drei wichtigen Sonderfällen der *projectiv*-trilinearen Verwandtschaft.

§ 1.

Zusammenstellung der Haupteigenschaften der allgemeinen projectiv-trilinearen Verwandtschaft zwischen drei ebenen Systemen.

1) In jedem von drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen S, S', S'' (vgl. Fig. 1) existirt eine ausgezeichnete Gerade, *Hauptaxe* genannt, und auf

---

*) Dieselben mögen, da sie im Folgenden mehrfach citirt werden, hier zusammengestellt werden: I. Art. in Bd. 95 dieses Journals, S. 1. — II. Art. in Bd. 97, S. 261. — III. Art. in Bd. 98, S. 304. — IV. Art. in Bd. 108, S. 25.

dieser ein Paar ausgezeichneter Punkte p und q, p' und q', p'' und q'', ***Kernpunkte*** genannt. Von den Kernpunkten sind je zwei in verschiedenen Ebenen liegende, nämlich q und p', q' und p'', q'' und p einander zugeordnet und werden als ***gegnerische*** Kernpunkte bezeichnet. Die beiden anderen Kernpunkte derselben Ebenen, also p und q', p' und q'', p'' und q, heissen ***correspondirende*** Kernpunkte.

2) Je zwei gegnerische Kernpunkte haben die Eigenschaft, dass von ihnen aus die betreffenden zwei Systeme sich durch projectivische Strahlenbüschel projiciren, in welchen die Hauptaxen ein Paar entsprechender Strahlen bilden. Die ***Punkte*** in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen sind demnach ***dreifach gebunden*** durch die drei Bedingungen, dass je zwei zugeordnete auf entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen müssen. Hieraus ergiebt sich die Lösung der ***Fundamentalaufgabe:*** ein Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' zu construiren: Man nimmt x' und x'' auf zwei entsprechenden Strahlen der gegnerischen Büschel q' und p'' beliebig an, zieht $p'x'$ und $q''x''$, bestimmt in dem mit p' gegnerischen Büschel q den $p'x'$ entsprechenden Strahl qx, ebenso in dem mit q'' gegnerischen Büschel p den $q''x''$ entsprechenden Strahl px, so stellt der Schnittpunkt der Strahlen qx und px den dritten zugeordneten Punkt x vor.

3) Die projectiv-trilineare Verwandtschaft zwischen drei ebenen Systemen ist ***vollständig und eindeutig bestimmt:*** durch die drei Paare von Kernpunkten und die drei projectivischen Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln, und demgemäss auch: durch die drei Paare von Kernpunkten und zwei Tripel zugeordneter Punkte, welche willkürlich gewählt werden können mit der Beschränkung, dass von den in einer Ebene liegenden zwei Tripelpunkten und zwei Kernpunkten keine drei Punkte in gerader Linie liegen dürfen.

4) Bringt man (vgl. Fig. 1) drei projectiv-trilineare Systeme S, S', S'' in ***räumlich-orientirte Lage,*** d. h. in solche Lage, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch, jedoch nicht in der nämlichen Ebene liegen, wobei die Schnittlinien $\mathfrak{g}_{01}$, $\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{g}_{20}$ der drei Systemebenen („***Grundschnitte***") die perspectivischen Durchschnitte bilden: so schneiden sich die drei Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte in drei Punkten O, O', O'', welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen nach irgend drei zugeordneten Punkten x, x', x'' gezogenen Strahlen Ox, $O'x'$, $O''x''$

sich in dem nämlichen Punkt X schneiden. Die drei Systeme stellen also in räumlich-orientirter Lage die Projectionen eines und desselben räumlichen Systems aus den drei Projectionscentren O, O', O'' vor. — Der Satz gilt auch noch, wenn die drei Systeme in der nämlichen Ebene so liegen, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch sind und die perspectivischen Durchschnitte sich in dem nämlichen Punkte schneiden. Man hat dann ein veränderliches ebenes Sechseck, das sich so bewegt, dass drei nicht auf einander folgende Ecken auf drei durch einen Punkt gehenden Leitgeraden laufen, während die sechs Seiten sich um sechs feste Punkte drehen.

5) Liegt von einem Tripel zugeordneter Punkte einer auf einer Hauptaxe, so müssen die zwei anderen im allgemeinen ebenfalls auf den Hauptaxen ihrer bezüglichen Systeme liegen. — Fällt von einem Tripel zugeordneter Punkte einer in einen Kernpunkt, so muss stets ein zweiter ebenfalls in einen Kernpunkt fallen, und zwar entweder in den correspondirenden oder in den gegnerischen. Der dritte zugeordnete Punkt wird unbestimmt; und zwar kann zu zwei correspondirenden Kernpunkten als dritter zugeordneter Punkt jeder beliebige Punkt der dritten Ebene functioniren, während zwei gegnerischen Kernpunkten nur jeder beliebige Punkt der Hauptaxe der dritten Ebene zugeordnet ist. — Von den Kernpunkten können nur drei solche ein Tripel zugeordneter Punkte vorstellen, von denen der eine der correspondirende, der zweite der gegnerische des dritten ist.

6) Beschränkt man in einem der drei Systeme die Punkte auf eine gerade Linie, so werden dadurch die Punkte in den zwei anderen Systemen einander collinear zugeordnet.

7) Drei ebene Systeme, die zu drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen einzeln collinear sind, sind unter sich ebenfalls projectiv-trilinear.

---

8) Die *Geraden* in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen sind *zweifach gebunden.* Zwischen zweien von drei zugeordneten Geraden findet im allgemeinen keine nähere Beziehung statt.

9) Hat man zwei Tripel zugeordneter Punkte, so bilden deren drei *Verbindungslinien* ein Tripel zugeordneter Geraden. Zu zwei beliebigen Geraden $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ in S' und S'' findet man daher die dritte zugeordnete $\mathfrak{l}$ in S, indem man auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ irgend zwei Paare zugeordneter Punkte markirt, zu ihnen die dritten zugeordneten Punkte construirt und diese verbindet.

10) Geht von einem Tripel zugeordneter Geraden eine durch einen

Kernpunkt, so muss auch noch eine zweite durch einen Kernpunkt gehen, und zwar entweder durch den correspondirenden, oder durch den gegnerischen. Zwei durch correspondirende Kernpunkte gehenden Geraden ist in der dritten Ebene ein bestimmter Punkt, bezw. eine durch diesen Punkt gehende unbestimmte Gerade zugeordnet. Zwei durch gegnerische Kernpunkte gehenden Geraden entspricht als dritte zugeordnete im allgemeinen die Hauptaxe der dritten Ebene; bilden aber die zwei ersten Geraden entsprechende Strahlen der betreffenden gegnerischen Kernstrahlenbüschel, so wird die dritte zugeordnete Gerade unbestimmt.

11) Hat man zwei Tripel zugeordneter Geraden, so bilden deren drei *Schnittpunkte* im allgemeinen kein Tripel zugeordneter Punkte. Sind aber zwei Schnittpunkte einander zugeordnet, so muss ihnen auch der dritte zugeordnet sein. Die Schnittpunkte dreier zugeordneten Geraden mit den drei Hauptaxen bilden stets ein Tripel zugeordneter Punkte.

12) Auf drei einander nicht zugeordneten geraden Linien ist stets ein — und im allgemeinen nur ein Tripel zugeordneter Punkte vorhanden.

13) Den unendlich fernen Geraden zweier Systeme entspricht als zugeordnete im dritten System im allgemeinen eine endliche Gerade, welche die *Fluchtlinie* des betreffenden Systems heisst und die Hauptaxe in deren *Fluchtpunkt* schneidet.

14) Die drei Kernstrecken werden in den drei Fluchtpunkten im nämlichen Verhältniss C getheilt, welches als die *Charakteristik* der trilinearen Verwandtschaft bezeichnet wird.

15) In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen existirt stets ein — und im allgemeinen nur ein Tripel zugeordneter Punkte im Unendlichen; es wird gebildet von den unendlich fernen Punkten der drei Fluchtlinien. — Bei räumlicher Orientirung mit parallelen Grundschnitten müssen die Grundschnitte den Fluchtlinien parallel sein.

---

16) Auf drei zugeordneten geraden Linien bilden die zugeordneten Punkte im allgemeinen drei *projectivische Punktreihen.*

17) Sind von einem Tripel zugeordneter Geraden zwei den bezüglichen Fluchtlinien parallel, so muss es auch die dritte sein. Auf drei solchen Geraden sind die von den zugeordneten Punkten gebildeten Punktreihen *ähnlich.* — Unter den ähnlichen zugeordneten Punktreihen existiren im allgemeinen vier Tripel *congruenter* zugeordneter Punktreihen.

18) Auf den drei Hauptaxen stehen die von den zugeordneten Punkten gebildeten Punktreihen nicht in projectivischer, sondern in *doppelkernig-trilinearer* Beziehung mit der Charakteristik C (vgl. IV. Art. § 1—4).

19) Die durch drei zugeordnete Punkte gehenden zugeordneten Geraden bilden drei *trilineare Strahlenbüschel,* und zwar ist die trilineare Beziehung eine doppelkernige (vgl. IV. Art. § 5—6) bei allgemeiner Lage der Centren, — eine einzelkernige (vgl. IV. Art. § 7—9), wenn die Centren auf den drei Hauptaxen liegen. — Fallen zwei Centren in zwei correspondirende Kernpunkte, so ist die trilineare Beziehung einzelkernig oder doppelkernig, je nachdem das dritte Centrum auf der betreffenden Hauptaxe liegt oder nicht. Kommen zwei Centren in zwei gegnerische Kernpunkte zu liegen, so ist die trilineare Beziehung eine ausgeartete (vgl. IV. Art. § 11). Das Gleiche ist der Fall, wenn die drei Centren in drei Kernpunkten liegen.

20) Drei projectiv-trilineare ebene Systeme projiciren sich aus irgend drei zugeordneten Punkten auf drei beliebige in ihren Ebenen liegende Geraden als trilineare Punktreihen, welche doppelkernig oder einzelkernig oder ausgeartet sind, wenn die drei Projectionscentren allgemein —, oder wenn sie auf den Hauptaxen —, oder wenn zwei derselben in gegnerischen Kernpunkten liegen.

§ 2.

Die allgemeine sectiv-trilineare Verwandtschaft zwischen drei ebenen Systemen.

Aus den vorstehenden Sätzen über die *projectiv*-trilineare Verwandtschaft, soweit sie sich nicht auf unendlich ferne Elemente beziehen, ergeben sich die entsprechenden Sätze für die *sectiv*-trilineare Verwandtschaft durch reciproke Umformung nach dem Reciprocitätsgesetz der Ebene.

Hiernach enthält jedes der drei sectiv-trilinearen Systeme $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ einen ausgezeichneten Punkt — „*Hauptpunkt*“ —, durch welchen je zwei ausgezeichnete Gerade — „*Kerngerade*“ — gehen (vgl. Fig. 2, in welcher die drei Hauptpunkte im nämlichen Punkt A vereinigt liegen). Von den Kerngeraden sind je zwei „*gegnerische*“ ($\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$ und $\mathfrak{p}$) die Träger von projectivischen Punktreihen, in welchen die Hauptpunkte ein Paar entsprechender Punkte bilden. Zwischen drei zugeordneten Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ besteht die Beziehung, dass je zwei durch entsprechende Punkte der bezüglichen gegnerischen Kernpunktreihen gehen müssen.

Die sectiv-trilineare Verwandtschaft ist *bestimmt:* durch die drei Paare von Kerngeraden und die drei projectivischen Beziehungen zwischen je zwei

gegnerischen Kernpunktreihen, und demgemäss auch: durch die drei Paare von Kerngeraden und zwei Tripel zugeordneter Geraden, wobei sich von den vier Bestimmungsgeraden einer Ebene keine drei in demselben Punkt schneiden dürfen.

Die drei Systeme können leicht in *orientirte Lage in einer und derselben Ebene* gebracht werden, bei welcher je zwei gegnerische Kernpunktreihen perspectivisch sind. Am einfachsten geht dies, wenn man die Systeme so legt, dass die drei Hauptpunkte zusammenfallen. Fig. 2 veranschaulicht diese Lage. Danach kann man sagen: Bewegt sich ein veränderliches ebenes Sechseck so, dass die sechs Ecken auf sechs festen, einem Strahlenbüschel angehörigen Leitgeraden laufen, während drei nicht auf einander folgende Seiten sich um drei feste Punkte g_{01}, g_{12}, g_{20} drehen, so beschreiben die drei übrigen Seiten drei sectiv-trilineare Geradensysteme.

In zwei sectiv-trilinearen ebenen Systemen sind die Geraden *dreifach*, die Punkte *zweifach gebunden*. Hat man zwei Tripel zugeordneter Geraden, so bestimmen deren drei Schnittpunkte ein Tripel zugeordneter Punkte. Dagegen bilden die drei Verbindungslinien von zwei Tripeln zugeordneter Punkte im allgemeinen kein Tripel zugeordneter Geraden. — Durch drei zugeordnete Punkte geht stets ein — und im allgemeinen nur ein Tripel zugeordneter Geraden.

Die durch drei zugeordnete Punkte gehenden zugeordneten Geraden bilden im allgemeinen drei *projectivische Strahlenbüschel.* Nur in den drei Hauptpunkten stehen sie in *doppelkernig-trilinearer* Beziehung. — Auf drei zugeordneten Geraden bilden die zugeordneten Punkte drei *trilineare Punktreihen,* welche doppelkernig oder einzelkernig oder ausgeartet sind, je nachdem die Geraden allgemein liegen, oder durch die drei Hauptpunkte gehen, oder zwei von ihnen mit gegnerischen Kerngeraden zusammenfallen. — Drei sectiv-trilineare Geradensysteme werden von irgend drei zugeordneten Geraden nach trilinearen Punktreihen geschnitten.

Was die Zuordnungsverhältnisse der *unendlich fernen* Elemente der drei Systeme anlangt, so ergiebt sich Folgendes: Von drei zugeordneten *Geraden* kann im allgemeinen nur eine ins Unendliche fallen, was jedoch nichts Besonderes darbietet. — Von Tripeln zugeordneter *Punkte* im Unendlichen existirt eine einfach unendliche Schaar; zu jedem unendlich fernen Punkt eines Systems sind die ihm zugeordneten unendlich fernen der zwei anderen Systeme vollständig und eindeutig bestimmt. (Denn ist z. B. in

Fig. 2 den unendlich fernen Schnittpunkten u'_∞ von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ und u''_∞ von $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$ der Schnittpunkt u von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zugeordnet, und hält man den Punkt u''_∞ fest, während man u'_∞ ändert, wobei $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ zwei congruente Strahlenbüschel um die Punkte μ' und ν' beschreiben, so beschreiben $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei projectivische Strahlenbüschel um die Punkte m und n. Da diese den Strahl mn entsprechend gemein haben, so erzeugen die Schnittpunkte u ihrer entsprechenden Strahlen eine gerade Linie, deren unendlich ferner Punkt u_∞ mit dem entsprechenden u'_∞ und dem festen u''_∞ ein Tripel zugeordneter Punkte bildet.)

Man kann zu der sectiv-trilinearen Verwandtschaft auch dadurch gelangen, dass man das Reciprocitätsgesetz *des Raumes* auf die (durch Fig. 1 verbildlichten) Verhältnisse bei der *räumlichen Orientirung* dreier projectiv-trilinearen Systeme anwendet. Man erhält dadurch zunächst drei trilineare Strahlenbündel, in denen die Ebenen dreifach, die Strahlen zweifach gebunden sind; diese werden dann durch drei beliebige Ebenen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ nach drei sectiv-trilinearen ebenen Systemen geschnitten. — Diese Entstehungsart lässt sich auch so formuliren: Man hat zunächst (den Projectionscentren O, O', O'' der Fig. 1 reciprok entsprechend) drei Grundebenen, in denen drei sectiv-trilineare ebene Systeme von specieller Art dadurch erzeugt werden, dass die drei Spurgeraden einer beliebigen Ebene (dem Punkt X der Fig. 1 entsprechend) drei zugeordnete Geraden —, die drei Spurpunkte einer beliebigen Raumgeraden drei zugeordnete Punkte bestimmen. Diese drei speciellen Systeme werden dann auf die Ebenen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ centralprojectivisch (die Projectionscentren entsprechen den Ebenen S, S', S'' der Fig. 1) abgebildet, wobei sich jede der drei Schnittkanten der Grundebenen in zwei gegnerische Kerngeraden projicirt. — Eben aus dieser Auffassungsweise entnehmen wir die Veranlassung, die in Rede stehende Verwandtschaft als „*sectiv*-trilinear“ zu bezeichnen (vgl. I. Art. § 1).

§ 3.

I. Specialfall der projectiv-trilinearen Verwandtschaft: Charakteristik $C = -1$.

Ist in drei projectiv-trilinearen Systemen die Charakteristik der zwischen den Punkten der Hauptaxen bestehenden trilinearen Beziehung gleich -1, so sind die unendlich fernen Punkte der Hauptaxen einander zugeordnet, die drei Fluchtpunkte fallen ins Unendliche (vgl. IV. Art. § 3). Demzufolge müssen die Fluchtlinien der drei Systeme, welche durch jene

Fluchtpunkte gehen, den bezüglichen Hauptaxen parallel sein. Es werden daher auch die Tripel ähnlicher und congruenter Punktreihen den Hauptaxen parallel. Hierin liegt das Charakteristische des vorliegenden Specialfalles.

Denkt man sich die drei Systeme gegeben durch die drei Paare von Kernpunkten und zwei Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' und b, b', b'', so sind diese nicht mehr unabhängig von einander. Werden z. B. die Kernpunkte und fünf Tripelpunkte a, a', a'', b, b' willkürlich gewählt, und schneiden ab und $a'b'$ die bezüglichen Hauptaxen in den Punkten c und c', so muss der sechste Tripelpunkt b'' auf der Geraden $a''c''$ liegen, deren Punkt c'' auf der dritten Hauptaxe sich bestimmt durch die Gleichung: $\frac{pc}{cq} \cdot \frac{p'c'}{c'q'} \cdot \frac{p''c''}{c''q''} = -1.$

Die Besonderheiten des gegenwärtigen Falles treten am anschaulichsten zu Tage, wenn die drei Systeme in orientirte Lage mit parallelen Grundschnitten gebracht werden. Die im II. Art. § 2 erörterten bezüglichen Constructionen bedürfen hierzu nur einer unwesentlichen Modification. Man schneidet wieder jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei congruenten Punktreihen parallel den Fluchtlinien (hier Hauptaxen), wozu zwei Paare entsprechender Strahlen für jedes Büschelpaar ausreichen. Während nun hierfür im allgemeinen Falle ausser den zu einem beliebigen Punktetripel $xx'x''$ gehörigen Kernstrahlen noch die Hauptaxen verwendet wurden, müssen jetzt statt der Hauptaxen die einem zweiten Tripel $yy'y''$ zugehörigen Kernstrahlen (s. Fig. 3a) benutzt werden. Im übrigen ist die Construction ganz dieselbe wie im Art. II, § 2*).

Fig. 3a zeigt die auf solche Weise gewonnene Orientirung der drei Systeme, und zwar zunächst derart, dass die Systeme S' und S'' in die Ebene des Systems S umgeklappt sind. — Stellt man nun hieraus die *räumlich* orientirte Lage her, indem man S' und S'' um die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{20}$ dreht, bis $\mathfrak{g}'_{12}$ und $\mathfrak{g}''_{12}$ zusammenfallen, so müssen die drei Hauptaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ in *eine* Ebene zu liegen kommen. Denn die Verbindungslinien je zweier gegnerischer Kernpunkte müssen sich schneiden und durch ihre Schnitte die drei Projectionscentren bestimmen.

Um die diesbezüglichen Verhältnisse genauer zu überschauen, denken

*) Die Grundschnitte $\mathfrak{g}_{20}$ und $\mathfrak{g}_{01}$ der jetzigen Fig. 3a sind in der bezüglichen Fig. 3 des Art. II mit $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_1$ bezeichnet.

wir uns die räumlich orientirten Systeme auf eine zu den Grundschnitten senkrechte Ebene orthogonal projicirt. In der Projection (s. Fig. 3b) stellen sich die drei Ebenen S, S', S'' als gerade Linien, die drei Grundschnitte und die drei Hauptaxen als Punkte dar, die letzteren in gerader Linie $\mathfrak{l}$ liegend. Die Projectionsfigur, in welcher die Buchstabenbezeichnungen gleichlautend mit denen im räumlichen Gebilde sowie in Fig. 3a gewählt sind, kann mittelst der aus Fig. 3a entnommenen horizontalen Entfernungsmaasse der Grundschnitte und Hauptaxen leicht construirt werden.

Um des weiteren die *Projectionscentren* O, O', O'', bezw. deren Projectionen zu erhalten, zeichnet man das in der Ebene der drei Hauptaxen liegende Gebilde in wahrer Gestalt (s. Fig. 3c), indem man die horizontalen Abstände der Hauptaxen aus Fig. 3b, die verticalen Höhenunterschiede der sechs Kernpunkte aus Fig. 3a entnimmt. Zieht man dann in Fig. 3c die Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte, so schneiden sich diese in den drei Projectionscentren O, O', O'', deren horizontale Abstände von den Hauptaxen nun aus Fig. 3c in Fig. 3b übertragen werden.

In Fig. 3b ist ferner noch die Construction der drei *Fluchtlinien* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}''$, bezw. ihrer Projectionen, ausgeführt. Man erhält sie, indem man z. B. durch O' und O'' die Parallelstrahlen zu S' und S'' — und nach deren Schnittpunkt $\mathfrak{U}$ den Strahl $O\mathfrak{U}$ zieht, welcher S in $\mathfrak{u}$ schneidet.

Wie Fig. 3b zeigt, projiciren sich die drei ebenen Systeme als *einselkernig-trilineare Punktreihen* in orientirter Lage, die Axenprojectionen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ stellen die Kernpunkte vor. Es ist dies eine Folge des in § 1 unter No. 20 aufgeführten Satzes. Denn die Linien S, S', S'' in Fig. 3*b* können als drei in den ebenen Systemen liegende Gerade betrachtet werden, auf welche die Systeme aus den einander zugeordneten unendlich fernen Punkten der Hauptaxen projicirt sind.

Hinsichtlich der vier Tripel *congruenter zugeordneter Punktreihen* erfordert der gegenwärtige Specialfall eine besondere Betrachtung. Die im II. Art. § 3 für den allgemeinen Fall gegebene bezügliche Construction wird hier, wo jene vier Tripel den Hauptaxen parallel sind, hinfällig.

In Fig. 3a wurden stillschweigend die zwei Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' und y, y', y'' auf einem der vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen angenommen, und zwar auf demjenigen, bei welchem in der hergestellten orientirten Lage der Richtungssinn aller drei Punktreihen übereinstimmend ist. Es ist also: $xy = x'y' = x''y''$. Mit Rücksicht

hierauf liefert Fig. 3*a* unmittelbar die zwei Proportionen:

$$\frac{p'x'}{p'G_{01}} = \frac{qx}{qG_{01}}, \quad \frac{q''x''}{q''G_{20}} = \frac{px}{pG_{20}},$$

oder, wenn die senkrechten Abstände der Punkte x, x', x'' von den Hauptaxen und Grundschnitten sowie der letzteren unter sich durch einfaches Nebeneinanderstellen der betreffenden Buchstaben bezeichnet, und statt der obigen Verhältnisse der schiefen Strecken die ihnen gleichen Verhältnisse der senkrechten Abstände eingeführt werden:

$$(1^a.) \qquad \frac{\mathfrak{a}'x'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}_{01}} = \frac{\mathfrak{a}x}{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{01}}, \quad \frac{\mathfrak{a}''x''}{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}_{20}} = \frac{\mathfrak{a}x}{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{20}}.$$

Werden nun die Punkte x, x', x'' in die Fig. 3b eingezeichnet, indem man die Abstände $\mathfrak{a}x$, $\mathfrak{a}'x'$, $\mathfrak{a}''x''$ aus Fig. 3a überträgt, so besagen die zwei Gleichungen (1a.), dass in Fig. 3b die drei Punkte x, x', x'' in einer zu $\mathfrak{l}$ parallelen Geraden liegen müssen. Es liegen folglich die drei congruenten Punktreihen in einer und derselben Ebene, welche parallel zur Ebene der drei Hauptaxen ist.

Hiernach läuft die Aufgabe, die drei congruenten zugeordneten Punktreihen zu bestimmen, darauf hinaus: in den drei einzelkernig-trilinearen Punktreihen S, S', S'' der Fig. 3b dasjenige Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' zu finden, welches auf einer zu $\mathfrak{l}$ parallelen Geraden liegt. Dies kann auf folgende Weise geschehen: Die drei Punkte x, x', x'' müssen der Grundrelation der einzelkernig-trilinearen Beziehung zwischen drei Punktreihen genügen, welche, angewendet auf die Bezeichnungen der Fig. 3b, lautet (vgl. IV. Art. § 7, Gleichung (13.)):

$$(2.) \qquad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}x} + \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{v}'}{\mathfrak{a}'x'} + \frac{\mathfrak{a}''\mathfrak{w}''}{\mathfrak{a}''x''} = 1.$$

Setzt man hier die sich aus (1^a.) ergebenden Ausdrücke für $\mathfrak{a}'x'$ und $\mathfrak{a}''x''$ ein, so erhält man:

$$(3.) \qquad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\mathfrak{u} + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{01}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}_{01}}\mathfrak{a}'\mathfrak{v}' + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{20}}{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}_{20}}\mathfrak{a}''\mathfrak{w}''.$$

Hieraus lässt sich $\mathfrak{a}x$ leicht construiren. Zieht man nämlich durch $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w}''$ Parallelen zu $\mathfrak{l}$, welche die Linie S schneiden in φ und ψ, so ist:

$$\mathfrak{a}\varphi = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{01}}{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}_{01}}\mathfrak{a}'\mathfrak{v}', \quad \mathfrak{a}\psi = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{20}}{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}_{20}}\mathfrak{a}''\mathfrak{w}'';$$

folglich hat man nach Gleichung (3.):

$$(4^a.) \qquad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\mathfrak{u} + \mathfrak{a}\varphi + \mathfrak{a}\psi.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{a}'x'$ und $\mathfrak{a}''x''$.

Die vorstehende Betrachtung bezog sich auf dasjenige Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen, bei welchem in der zu Grunde gelegten orientirten Lage die drei Punktreihen übereinstimmende Richtung haben. Bei den übrigen drei Tripeln ist immer die Richtung einer Punktreihe entgegengesetzt den Richtungen der zwei anderen.*) Man gelangt zu ihnen auf folgende Weise:

Nehmen wir an, in Fig. 3a hätte z. B. xy die entgegengesetzte Richtung (also von unten nach oben), so dürfte xy mit Rücksicht auf seine Zuordnung zu $x'y'$ nicht (wie in Fig. 3a) in dem Scheitelwinkelraum von Winkel $G_{01}qH_{01}$ —, sondern müsste in diesem Winkel selbst liegen, und zwar in dem nämlichen Abstand von q. Andererseits müsste xy mit Rücksicht auf seine Zuordnung zu $x''y''$ in dem Scheitelwinkelraum von Winkel $G_{20}pH_{20}$ im nämlichen Abstand von p wie vorher liegen. Die Gleichungen (1ᵃ.) würden sich demgemäss ändern in:

$$(1^b.)\qquad \frac{\mathfrak{a}'x'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}_{01}} = \frac{-\mathfrak{a}x}{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{01}},\quad \frac{\mathfrak{a}''x''}{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}_{20}} = \frac{-\mathfrak{a}x}{\mathfrak{a}\mathfrak{g}_{20}},$$

was die Aenderung der Gleichung (4ᵃ.) in:

$$(4^b.)\qquad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\mathfrak{u} - \mathfrak{a}\varphi - \mathfrak{a}\psi$$

zur Folge hat.

Analoges gilt, wenn $x'y'$ oder $x''y''$ entgegengesetzte Richtung hat. Im ersten Fall wird in den Gleichungen (1ᵃ.) $\mathfrak{a}'x'$, im zweiten Fall wird $\mathfrak{a}''x''$ negativ, wodurch Gleichung (4ᵃ.) sich ändert in:

$$(4^c.)\qquad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\mathfrak{u} - \mathfrak{a}\varphi + \mathfrak{a}\psi$$

und:

$$(4^d.)\qquad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}\mathfrak{u} + \mathfrak{a}\varphi - \mathfrak{a}\psi.$$

---

*) Es ist hervorzuheben, dass das Tripel mit übereinstimmender Richtung der Punktreihen nicht etwa einen bevorzugten Rang einnimmt, sondern den drei anderen Tripeln vollkommen gleichwerthig ist. Der Unterschied bezieht sich lediglich auf die der Betrachtung zu Grunde gelegte zufällige Anordnung der orientirten Lage. Man könnte diese Anordnung z. B. in der Art ändern, dass man (vgl. Fig. 3a) das System S in seiner Ebene um 180° dreht und die neuen Grundschnitte $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}_{20}$ je in symmetrischer Lage mit den alten in Beziehung zur Axe $\mathfrak{a}$ annimmt. In der diesen neuen Grundschnitten entsprechenden Orientirung ist jetzt die Richtung von xy entgegengesetzt den Richtungen von $x'y'$ und $x''y''$, während eines der drei anderen Tripel übereinstimmende Richtung der Punktreihen aufweist. — Diese Bemerkung beschränkt sich selbstverständlich nicht bloss auf den gegenwärtigen Specialfall, sondern gilt auch für den (im II. Art. § 3 behandelten) allgemeinen Fall.

Betreffs der gegenseitigen Lage der vier Punktreihen folgt aus den vier Gleichungen (4^a.), (4^b.), (4^c.), (4^d.), dass einerseits die den Gleichungen (4^a.) und (4^b.), andererseits die den Gleichungen (4^c.) und (4^d.) entsprechenden Punktreihen je unter sich symmetrisch liegen in Beziehung auf die Fluchtlinie $\mathfrak{u}$. Das Nämliche gilt für die vier Punktreihen in der Ebene S' und diejenigen in der Ebene S'', jedoch in der Art, dass, wenn durch $\mathfrak{x}_a \mathfrak{x}'_a \mathfrak{x}''_a$ das gleichstimmige Tripel, durch $\mathfrak{x}_b \mathfrak{x}'_b \mathfrak{x}''_b$, $\mathfrak{x}_c \mathfrak{x}'_c \mathfrak{x}''_c$, $\mathfrak{x}_d \mathfrak{x}'_d \mathfrak{x}''_d$ die drei ungleichstimmigen Tripel bezeichnet werden, $\mathfrak{x}_a$ und $\mathfrak{x}_b$, $\mathfrak{x}'_a$ und $\mathfrak{x}'_c$, $\mathfrak{x}''_a$ und $\mathfrak{x}''_d$, ferner $\mathfrak{x}_c$ und $\mathfrak{x}_d$, $\mathfrak{x}'_b$ und $\mathfrak{x}'_d$, $\mathfrak{x}''_b$ und $\mathfrak{x}''_c$ je unter sich symmetrisch sind in Beziehung auf die zugehörige Fluchtlinie.*)

Schliesslich ist es noch von Interesse, die Lage derjenigen vier Raumgeraden zu ermitteln, deren Projectionen die congruenten zugeordneten Punktreihen vorstellen.

Fassen wir zunächst wieder das gleichstimmige Tripel ins Auge, so stellt sich die zugehörige Raumgerade in Fig. 3b als Punkt X dar, in welchem sich die drei Strahlen Ox, $O'x'$, $O''x''$ schneiden. Um diesen Punkt X ohne Vermittelung der Punkte x, x', x'' direct zu erhalten, kann man folgendermassen schliessen: Verschiebt man die Gerade xx' parallel mit sich selbst, so erzeugen ihre Schnittpunkte x und x' auf S und S' zwei ähnliche Punktreihen, welche aus O und O' durch projectivische Strahlenbüschel projicirt werden. Da diese den Strahl OO' entsprechend gemein haben, so liegen sie perspectivisch und erzeugen als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine gerade Linie, auf welcher der Punkt X liegen muss. Nun bilden einerseits $O\mathfrak{g}_{01}$ und $O'\mathfrak{g}_{01}$, andererseits $O\mathfrak{W}$ und $O'\mathfrak{W}$ ein Paar entsprechender Strahlen, daher ist $\mathfrak{W}\mathfrak{g}_{01}$ der fragliche Ort. Analoges gilt bezüglich der von $O'x'$ und $O''x''$, sowie der von $O''x''$ und Ox beschriebenen perspectivischen Strahlenbüschel. Es ergiebt sich somit: Die drei Linien $\mathfrak{U}\mathfrak{g}_{12}$, $\mathfrak{V}\mathfrak{g}_{20}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{g}_{01}$ schneiden sich in einem und demselben Punkt, welcher den gesuchten Punkt X vorstellt. Oder: Der gesuchte Punkt X

*) Es mag hier zum II. Art. § 3 nachgetragen werden, dass dieselbe Beziehung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der congruenten zugeordneten Punktreihen in jedem System auch für den dort behandelten allgemeinen Fall stattfindet. Für diejenigen zwei Punktreihen jedes Systems, deren eine dem gleichstimmigen Tripel angehört, folgt die symmetrische Lage leicht aus der dort angegebenen Construction. Für die zwei anderen Punktreihen ergiebt sich der Beweis dadurch, dass man die der Betrachtung zu Grunde gelegte Orientirung gemäss der Fussnote auf S. 217 so ändern kann, dass eines der zwei jene Punktreihen enthaltenden Tripel gleichstimmig wird.

fällt mit dem Aehnlichkeitspunkt der zwei ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{UVW}$ und $\mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{20}\mathfrak{g}_{01}$ zusammen.

Aehnlich ergeben sich die drei anderen Raumgeraden. Z. B. hat man für diejenige Raumgerade X_b, welche dem oben durch $\mathfrak{x}_b\mathfrak{x}'_b\mathfrak{x}''_b$ bezeichneten Punktreihentripel entspricht, in Fig. 3b gemäss den Gleichungen (1^b.) wieder zwei ähnliche Punktreihen auf S und S', die wir kurz als Punktreihe $-x$ und Punktreihe x' bezeichnen; die Punktreihe $-x$ ist zu der zuvor betrachteten Punktreihe x symmetrisch in Beziehung auf den Punkt $\mathfrak{a}$, die Punktreihe x' ist mit der früheren identisch. Die Strahlenbüschel, welche diese zwei Punktreihen aus O und O' projiciren, sind wieder perspectivisch und erzeugen eine Gerade, die sich leicht als der zu $\mathfrak{W}O$, $\mathfrak{W}O'$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{g}_{01}$ vierte harmonische, $\mathfrak{W}\mathfrak{g}_{01}$ zugeordnete Strahl zu erkennen giebt. Denn $O\mathfrak{W}$ und $O'\mathfrak{W}$ sind wieder entsprechende Strahlen der zwei Strahlenbüschel. Macht man ferner $\mathfrak{a}\gamma = \mathfrak{a}\mathfrak{g}_{01}$, so sind $O\gamma$ und $O'\mathfrak{g}_{01}$, die sich in Γ schneiden mögen, entsprechende Strahlen. Daher ist $\mathfrak{W}\Gamma$ die fragliche Gerade. Nun sind γ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_{01}$, ∞ vier harmonische Punkte, folglich ist das sie projicirende Strahlenbüschel $O, \Gamma O'\mathfrak{g}_{01}\mathfrak{W}$ harmonisch; dieses aber ist mit dem Strahlenbüschel $\mathfrak{W}, \Gamma O'\mathfrak{g}_{01}O$ perspectivisch in Beziehung auf die Linie $O'\Gamma$; womit die obige Behauptung bewiesen ist. — In gleicher Weise erzeugen die zwei Strahlenbüschel, welche die ähnlichen Punktreihen $-x$ und x'' aus O und O'' projiciren, eine gerade Linie, welche durch den zu $\mathfrak{V}O$, $\mathfrak{V}O''$, $\mathfrak{V}\mathfrak{g}_{20}$ vierten harmonischen, $\mathfrak{V}\mathfrak{g}_{20}$ zugeordneten Strahl vorgestellt ist. Die die Punktreihen x' und x'' projicirenden Strahlenbüschel erzeugen wieder die Gerade $\mathfrak{U}\mathfrak{g}_{12}$. Diese drei Geraden schneiden sich nun in einem Punkt, welcher der gesuchte Punkt X_b ist. — Analoges gilt betreffs der zwei übrigen Raumgeraden X_c und X_d. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Verbindet man in Fig. 3b die Ecken des Parallelstrahlendreiecks $\mathfrak{UVW}$ mit den entsprechenden Ecken des Grunddreiecks $\mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{20}\mathfrak{g}_{01}$ durch Aehnlichkeitsstrahlen und construirt in jeder Ecke des Parallelstrahlendreiecks zu den zwei anstossenden Dreiecksseiten und dem zugehörigen Aehnlichkeitsstrahl den vierten harmonischen, dem Aehnlichkeitsstrahl zugeordneten Strahl: so schneiden sich die drei Aehnlichkeitsstrahlen, sowie immer zwei vierte harmonische Strahlen mit einem Aehnlichkeitsstrahl in je einem Punkt. Die so gewonnenen vier Punkte stellen vier Raumgerade dar, die sich auf die drei Ebenen S, S', S'' aus O, O', O'' mit je unter sich congruenten Punktreihen projiciren.

§ 4.

II. Specialfall: Die unendlich fernen Geraden sind einander zugeordnet.

Sind die unendlich fernen Geraden der drei Systeme einander zugeordnet, so müssen bei räumlich-orientirter Lage die drei Parallelebenen, die durch die Projectionscentren zu den Systemebenen gelegt werden, sich in der nämlichen Raumgeraden schneiden, die wir mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen. Da somit die drei Systemebenen einer und derselben Geraden parallel sind, so müssen auch ihre drei Schnittlinien parallel sein. Es ist demgemäss in dem jetzigen Specialfall eine orientirte Lage überhaupt nicht anders möglich als mit parallelen Grundschnitten.

Während bei der allgemeinen Verwandtschaft, wie auch bei dem zuvor betrachteten Specialfall, nur ein einziges Tripel zugeordneter Punkte *im Unendlichen* existirt, sind im gegenwärtigen Falle unendlich viele solcher Tripel vorhanden. Zu irgend zwei zugeordneten unendlich fernen Punkten fällt der dritte zugeordnete stets ebenfalls ins Unendliche. Jedes unendlich ferne Punktetripel stellt bei räumlicher Orientirung die Projectionen eines bestimmten Punktes der Raumgeraden $\mathfrak{U}$ vor. Es entsprechen sich also nicht etwa in jedem Tripel zugeordneter Geraden die unendlich fernen Punkte; dies ist nur bei einem solchen Geradentripel der Fall, welches die Projectionen einer Raumgeraden vorstellt, die die Gerade $\mathfrak{U}$ schneidet. Von einem Tripel zugeordneter Richtungen kann daher nur eine Richtung beliebig angenommen werden; die zugeordneten in den zwei anderen Systemen sind dadurch vollständig und eindeutig bestimmt; sie ergeben sich, indem man im ersten System parallel zu der angenommenen Richtung die zwei Kernstrahlen zieht und in den zwei anderen Systemen die entsprechenden gegnerischen Kernstrahlen bestimmt. Insbesondere sind die Richtungen der drei Hauptaxen einander zugeordnet. Parallel zu jedem Tripel zugeordneter Richtungen existirt ein System von Tripeln zugeordneter Geraden, welche ähnliche zugeordnete Punktreihen enthalten. Jedes solche System stellt bei räumlicher Orientirung die Projectionen eines Strahlenbündels vor, dessen Centrum auf der Raumgeraden $\mathfrak{U}$ liegt.

Die drei *projectivischen Beziehungen* zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln sind jetzt nicht mehr unabhängig von einander, vielmehr ist durch zwei derselben die dritte bestimmt. Denn sind z. B. die zwei projectivischen Beziehungen zwischen den Kernstrahlenbüscheln q''

und p, q und p' gegeben, so ist zu jedem Strahl $\mathfrak{q}'$ des Büschels q' der entsprechende $\mathfrak{p}''$ des Büschels p'' dadurch bestimmt, dass man zu dem mit $\mathfrak{q}'$ parallelen Strahl $\mathfrak{p}'$ des Büschels p' den entsprechenden $\mathfrak{q}$ des Büschels q, ferner zu dem mit $\mathfrak{q}$ parallelen Strahl $\mathfrak{p}$ des Büschels p den entsprechenden $\mathfrak{q}''$ des Büschels q'' bestimmt und $\mathfrak{p}''$ parallel $\mathfrak{q}''$ zieht.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn die Verwandtschaft wieder durch die sechs Kernpunkte und zwei Tripel zugeordneter Punkte gegeben gedacht wird, von den letzteren sechs Punkten nur fünf willkürlich sind, der sechste durch sie vollständig bestimmt ist. Denn sind z. B. a, a', a'', b, b' gegeben, so sind damit in den zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln q und p' drei Paare —, in den zwei anderen je zwei Paare entsprechender Strahlen bekannt. Ein drittes Paar ergiebt sich für q' und p'', wenn man zu den zwei zugeordneten Richtungen $q''a''$ und pa die dritte zugeordnete Richtung in S' bestimmt und durch q' und p'' Parallelstrahlen zu den Richtungen in den betreffenden Ebenen zieht, — ebenso für q'' und p, wenn man zu den zugeordneten Richtungen $p''a''$ und $q'a'$ die dritte zugeordnete Richtung in S bestimmt.

Zur Herstellung einer *orientirten Lage* kann die Richtung der parallelen Grundschnitte parallel mit jedem Tripel zugeordneter Richtungen genommen werden. Die Ausführung geschieht ganz wie im allgemeinen Fall (vgl. II. Art. § 2).

Werden die Grundschnitte parallel den Hauptaxen gewählt, so verfährt man auf die im vorigen Paragraphen besprochene Weise. Denkt man sich hierbei die räumlich orientirten Systeme wieder auf eine zu den Grundschnitten senkrechte Ebene orthogonal projicirt, so modificirt sich die Projectionsfigur Fig. 3b in der Art, dass sich jetzt die drei durch O, O', O'' zu S, S', S'' gezogenen Parallelstrahlen in dem nämlichen Punkt $\mathfrak{U}$ schneiden, welcher die Projection der oben durch $\mathfrak{U}$ bezeichneten Raumgeraden vorstellt. Es stehen also jetzt die drei einzelkernig-trilinearen Punktreihen, als welche sich die drei ebenen Systeme projiciren, in der speciellen Beziehung, die wir im IV. Art. § 7 als *Poncelet-Beziehung* bezeichnet haben, und deren auf die Axenprojectionen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ als Kernpunkte bezogene Grundrelation lautet:

$$(5.)\qquad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{l}}{\mathfrak{a}x} + \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{m}'}{\mathfrak{a}'x'} - \frac{\mathfrak{a}''\mathfrak{n}''}{\mathfrak{a}''x''} = 0.$$

Hinsichtlich der *congruenten zugeordneten Punktreihen* zeigt der vor-

liegende Specialfall eine wesentliche Besonderheit gegenüber den bezüglichen Verhältnissen bei der allgemeinen Verwandtschaft sowie beim vorigen Specialfall.

Versucht man zunächst die betreffende Construction des vorigen Paragraphen auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, so fallen in Fig. 3b, da jetzt die Fluchtpunkte $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}''$ im Unendlichen liegen, auch die Punkte x, x', x'' ins Unendliche. Es existirt folglich unter dem System ähnlicher zugeordneter Punktreihen parallel zu den Hauptaxen kein congruentes Tripel im Endlichen.

Zu dem gleichen Ergebniss führt auch der Versuch, ein Tripel congruenter Punktreihen parallel zu einem beliebigen, den Hauptaxen nicht parallelen, Tripel zugeordneter Richtungen zu finden mit Anwendung der im II. Art. § 3 besprochenen allgemeinen Construction. Jene Construction bestand darin, dass man, ausgehend von einer orientirten Lage mit Grundschnitten parallel zu dem betreffenden Tripel zugeordneter Richtungen, drei Linien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ parallel zu den Hauptaxen so zog, dass zwischen sie und die Hauptaxen gleiche zu den Grundschnitten parallele Strecken fielen. Bestimmte man dann das auf $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ liegende Tripel zugeordneter Punkte c, c', c'', so bildeten die durch c, c', c'' zu den Grundschnitten gezogenen Parallelen die Träger dreier zugeordneten congruenten Punktreihen. — Führt man nun dies in dem gegenwärtigen Specialfall aus, so fallen, da jetzt die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ einander zugeordnet sind, die Punkte c, c', c'' und mit ihnen die zugeordneten congruenten Punktreihen ins Unendliche. Es ist folglich parallel mit einem *beliebigen* Tripel zugeordneter Richtungen im allgemeinen ein Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen nicht vorhanden.

Es kann indessen für ein gewisses *„ausgezeichnetes“* Tripel zugeordneter Richtungen, vielleicht auch für mehrere, der besondere Fall eintreten, dass die Linien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ für sich ein Tripel zugeordneter Geraden bilden. Alsdann würden die sämmtlichen auf $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ enthaltenen Tripel zugeordneter Punkte die Rolle der Punkte c, c', c'' vertreten können, so dass durch jedes derselben ein Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen ginge. Es würde also eine einfach unendliche Schaar von Tripeln congruenter Punktreihen parallel zu jenem Richtungstripel existiren. Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass nicht etwa jedes Tripel zugeordneter Geraden parallel zu dem betreffenden Richtungstripel zu der Schaar gehört. Denn nicht jedes

schneidet die Linien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ in zugeordneten Punkten. Bei räumlicher Orientirung stellt die Gesammtheit jener parallelen Geradentripel die Projectionen eines räumlichen Strahlenbündels vor; in diesem bilden diejenigen Strahlen, welche die sich nach $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ projicirende Raumgerade schneiden, ein Strahlenbüschel, und nur dieses Strahlenbüschel ist es, dessen Strahlen sich als Träger der congruenten zugeordneten Punktreihen projiciren.

Es handelt sich nun darum, ein solches „ausgezeichnetes" Tripel zugeordneter Richtungen, für welches das Gesagte zutrifft, zu ermitteln.

Wir legen der Untersuchung eine orientirte Lage mit Grundschnitten parallel zu den Hauptaxen wie im vorigen Paragraphen zu Grunde. Fig. 4a zeigt diese Orientirung mit in die Ebene S'' umgeklappten Ebenen S und S'.*) In derselben sind die Kernstrahlen parallel mit einer Anzahl beliebiger Tripel zugeordneter Richtungen markirt. Von den dadurch gebildeten sechs Kernstrahlenbüscheln sind je zwei gegnerische perspectivisch, je zwei in derselben Ebene liegende congruent in paralleler Lage. Angenommen nun, die Kernstrahlen pG_{20} und qG_{01}, $p'G'_{01}$ und $q'G_{12}$, $p''G_{12}$ und $q''G_{20}$ seien parallel zu dem gesuchten „ausgezeichneten" Richtungstripel: dann müssten nach den obigen Erörterungen, wenn man auf den Kernstrahlen pG_{20}, $q'G_{12}$, $p''G_{12}$ gleiche Strecken $p\gamma = q'\gamma' = p''\gamma''$ abschneidet, die durch die Punkte γ, γ', γ'' zu den Axen gezogenen Parallelen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ ein Tripel zugeordneter Geraden bilden. Denkt man sich also die räumlich orientirten Systeme auf eine zu den Grundschnitten senkrechte Ebene orthogonal projicirt, wobei sich die Geraden $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ als Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ projiciren, so müssten diese letzteren der Relation (5.) genügen, das heisst, es müsste sein:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{l}}{\mathfrak{a}\mathfrak{r}} + \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{m}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{s}'} - \frac{\mathfrak{a}''\mathfrak{n}''}{\mathfrak{a}''\mathfrak{t}''} = 0. \qquad (6.)$$

Hier bedeuten (vgl. IV. Art. § 7) $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ drei Punkte, von denen $\mathfrak{n}''$ auf der Punktreihe S'' beliebig gewählt werden kann, $\mathfrak{m}'$ auf S' den Punkten ∞ und $\mathfrak{n}''$ —, $\mathfrak{l}$ auf S den Punkten ∞' und $\mathfrak{n}''$ zugeordnet ist. Fasst man also die Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ der Projectionsfigur als die Projectionen von drei zu den Hauptaxen parallelen Geraden $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ der ebenen Systeme S, S', S'' auf, so kann von diesen Geraden $\mathfrak{n}''$ beliebig gewählt werden, $\mathfrak{m}'$ ist der unendlich fernen Geraden von S und der Geraden $\mathfrak{n}''$ zugeordnet, $\mathfrak{l}$ der unendlich fernen Geraden von S' und der Geraden $\mathfrak{n}''$. Hiernach können

*) Dass in Fig. 4a abweichend von der seitherigen Gepflogenheit das System S'' in die Mitte gelegt wurde, geschah im Interesse einer übersichtlicheren Gestaltung der Figur.

$\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ in Fig. 4a leicht eingezeichnet werden.*) Ihre Schnittpunkte mit den Kernstrahlen pG_{20}, $q'G_{12}$, $p''G_{12}$ seien λ, μ', ν''. Die in Gleichung (6.) enthaltenen sechs Strecken, welche zunächst Punktabstände in der Projectionsfigur bedeuten, stellen sich jetzt in Fig. 4a dar als die senkrechten Entfernungen der Hauptaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ von den ihnen parallelen Linien $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$. Nun sind aber die in Gleichung (6.) auftretenden drei Verhältnisse dieser Entfernungen bzw. gleich $\frac{p\lambda}{p\gamma}$, $\frac{q'\mu'}{q'\gamma'}$, $\frac{p''\nu''}{p''\gamma''}$. Folglich reducirt sich, weil $p\gamma = q'\gamma' = p''\gamma''$ ist, Gleichung (6.) auf:

$$p\lambda + q'\mu' - p''\nu'' = 0. \tag{7.}$$

Zur weiteren Verwerthung dieser Gleichung bemerken wir, dass das Strahlenbüschel p projectivisch ist zu den zwei perspectivisch liegenden Büscheln q' und p'', also mit diesen ebenfalls in perspectivische Lage gebracht werden kann. Führt man dies aus, so erhält man die Combination der drei Büschel mit ihren Schnittgeraden $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$, wie sie Fig. 4b zeigt; in ihr ist die seitherige Buchstabenbezeichnung $\mathfrak{g}_{12}$ und G_{12} kurz durch $\mathfrak{g}$ und G ersetzt. Wird nun das Verhältniss der Entfernungen des Punktes p von den Geraden $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{g}$ in Fig. 4b durch ε, und die entsprechenden Entfernungsverhältnisse der Punkte q' und p'' durch ε' und ε'' bezeichnet, so ist: $p\lambda = \varepsilon . pG$, u. s. f. Man erhält also aus Gleichung (7.):

$$\varepsilon . pG + \varepsilon' . q'G - \varepsilon'' . p''G = 0,$$

oder, wenn $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''} = \varrho$, $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \varrho'$ gesetzt wird:

$$\varrho \frac{pG}{p''G} + \varrho' \frac{q'G}{p''G} = 1. \tag{8.}$$

Die Aufgabe, ein „ausgezeichnetes" Tripel zugeordneter Richtungen zu ermitteln, reducirt sich demgemäss auf die Aufgabe: Auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{g}$ einen Punkt G so zu bestimmen, dass zwischen seinen Entfernungen von drei gegebenen Punkten p, q', p'' die durch Gleichung (8.) ausgedrückte Beziehung besteht, wo die Coefficienten ϱ und ϱ' zwei gegebene Verhältnisswerthe bedeuten.

---

*) Die betreffende Construction ist in der (zwar anders gestalteten, aber hinsichtlich der in Betracht kommenden Verhältnisse mit Fig. 4a gleichgearteten) Fig. 5 eingezeichnet: Punkt n'' ist beliebig gewählt, dann m' als dritter zugeordneter Punkt zu n'' und dem ihm zugeordneten unendlich fernen Punkt von S bestimmt, ebenso l als dritter zugeordneter zu n'' und dem ihm zugeordneten unendlich fernen Punkt von S'.

Dies ist eine Aufgabe vierten Grades. Denn zerlegt man Gleichung (8.) in die drei Gleichungen:

(a.) $$\frac{pG}{p''G} = u,$$

(b.) $$\frac{q'G}{p''G} = u',$$

(c.) $$\varrho u + \varrho' u' = 1,$$

so hat man für diese die folgende geometrische Interpretation:

Der geometrische Ort eines Punktes X, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten p und p'' ein gegebenes Verhältniss u haben, ist ein Kreis über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die Strecke pp'' im Verhältniss u harmonisch theilen. Die Gesammtheit dieser Kreise für ein veränderliches u bildet ein Kreisbüschel, welches die gerade Linie $\mathfrak{g}$ nach einem involutorischen Punktsystem schneidet. Durch die Gleichung (a.) ist also auf $\mathfrak{g}$ eine Involution $\mathfrak{U}$ bestimmt. Ebenso bestimmt die Gleichung (b.) eine zweite Involution $\mathfrak{U}'$ auf $\mathfrak{g}$. Diese zwei Involutionen sind nun durch Gleichung (c.) eindeutig auf einander bezogen. Zwei solche eindeutig auf einander bezogene Involutionen auf dem nämlichen Träger besitzen vier Doppelpunkte, von denen entweder alle vier reell sind oder zwei oder keiner. Jeder dieser Doppelpunkte genügt als Punkt G der Gleichung (8.) und bestimmt also ein „ausgezeichnetes" Tripel zugeordneter Richtungen. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen, deren unendlich ferne Geraden einander zugeordnet sind, sind im allgemeinen vier ausgezeichnete Tripel zugeordneter Richtungen vorhanden, parallel zu welchen vier Schaaren von Tripeln congruenter zugeordneter Punktreihen existiren.

Was die praktische Construction der vier Doppelpunkte anlangt, so geschieht diese in bekannter Weise dadurch, dass man die zwei Involutionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ auf einen Kegelschnitt, z. B. einen Kreis überträgt*). Man bestimmt zunächst auf $\mathfrak{g}$ für drei beliebige Werthe von u die Punktepaare Xx, Yy, Zz der Involution $\mathfrak{U}$, desgleichen für die entsprechenden Werthe von u' die Punktepaare $X'x'$, $Y'y'$, $Z'z'$ der Involution $\mathfrak{U}'$, und projicirt diese Punkte aus einem beliebigen Punkt O auf eine beliebig durch O gelegte Kreislinie nach Ξ, ξ, H, η, Z, ζ, Ξ', ξ', u. s. f.; dann schneiden sich die

*) Vgl. *Chasles*, Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré. Journal de Mathématiques, Tome XX (1855), pag. 329.

Sehnen $\Xi\xi$, $H\eta$, $Z\zeta$ im Involutionscentrum C, desgleichen die Sehnen $\Xi'\xi'$, $H'\eta'$, $Z'\zeta'$ im Involutionscentrum C'. Da nun die zwei Strahlenbüschel C und C' eindeutig auf einander bezogen sind, so bestimmen, wenn sich $\Xi\xi$ und $\Xi'\xi'$ in $\mathfrak{X}$, $H\eta$ und $H'\eta'$ in $\mathfrak{Y}$, $Z\zeta$ und $Z'\zeta'$ in $\mathfrak{Z}$ schneiden, die fünf Punkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, C, C' einen Kegelschnitt, welcher die Kreislinie in vier Punkten Γ schneidet, die aus O auf $\mathfrak{g}$ projicirt die vier Doppelpunkte G liefern.

§ 5.

III. Specialfall: Je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel sind congruent bei zugeordneten unendlich fernen Geraden.

Ein wichtiger Unterfall des letztbesprochenen Specialfalles entsteht durch das Hinzutreten der Besonderheit, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel congruent sind. — Die Congruenz der Kernstrahlenbüschel allein schliesst die Bedingung, dass die unendlich fernen Geraden der drei Systeme einander zugeordnet seien, nicht nothwendig in sich. Die bezüglichen Verhältnisse werden nachher zur Erörterung gelangen. Zunächst gehen wir von der Sachlage aus, wie sie in der vorher betrachteten Fig. 4a obwaltet, und fügen hierzu noch die weitere Bedingung der Congruenz je zweier gegnerischen Kernstrahlenbüschel. Fig. 4a modificirt sich dann in der Weise, wie Fig. 5 zeigt: Die gegnerischen Kernpunkte q' und p'' kommen symmetrisch zum Grundschnitt $\mathfrak{g}_{12}$ zu liegen, ebenso q'' und p symmetrisch zu $\mathfrak{g}_{20}$; dagegen liegen q und p' auf der nämlichen Seite des zugehörigen Grundschnitts $\mathfrak{g}_{01}$ in gleichen Abständen, so dass die Strahlenbüschel q und p' sich in paralleler Lage befinden.

Man erkennt jedoch leicht, dass es unter solchen Umständen nicht mehr möglich ist, die drei Systeme in *räumlich*-orientirte Lage mit Grundschnitten parallel zu den Hauptaxen zu bringen. Denn Fig. 5 zeigt, dass die congruenten Schnittpunktreihen, welche die Büschel q und p' auf $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}'_{01}$ erzeugen, nur dann in gleicher Höhe liegen können, wenn zwischen den Kernstrecken die Beziehung besteht: $pq+p'q'+p''q''=0$. Aber auch wenn dies zutrifft, ist die Ueberführung in räumlich-orientirte Lage nicht möglich, weil, wie aus Fig. 5 unschwer zu erkennen ist, der Abstand der zwei in S'' liegenden Grundschnitte gleich der Summe der Grundschnitt-Abstände in S und S' ist.

Ganz dieselben Schwierigkeiten ergeben sich bei dem Versuche der

räumlichen Orientirung mit Grundschnitten parallel zu irgend einem anderen Tripel zugeordneter Richtungen.

Nur bei demjenigen Richtungstripel, welches *senkrecht zu den Hauptaxen* ist, fallen diese Misstände weg und ist eine räumliche Orientirung möglich unter der Bedingung, dass die Summe zweier Kernstrecken nicht gleich oder kleiner als die dritte ist. Fig. 6*) zeigt diese Orientirung mit in die Ebene S'' umgeklappten Ebenen S' und S. Sie ergiebt sich, indem man einfach die drei Systeme so neben einander legt, dass die drei Hauptaxen in die nämliche Gerade fallen; die Linien $\mathfrak{g}_{01}$ und $\mathfrak{g}'_{01}$ werden in gleichen und gleichsinnigen Abständen von q und p' markirt. Die Anordnung der drei Paare von gegnerischen Kernstrahlenbüscheln ist die nämliche wie in Fig. 5: Die zwei Büschel q' und p'', desgleichen q'' und p liegen symmetrisch zu ihren bezüglichen Grundschnitten; dagegen befinden sich die Büschel q und p' in paralleler Lage.

Wäre die Summe zweier Kernstrecken gleich oder kleiner als die dritte, so würde das Nämliche hinsichtlich der entsprechenden Grundschnitt-Abstände der Fall sein, wodurch die räumliche Orientirung unmöglich würde.

Drei Systeme von der besprochenen Beschaffenheit können aber nun stets auch noch in andersartige räumliche Orientirung gebracht werden, nämlich in solche, bei welcher die drei Systemebenen *parallel* sind, und zwar gilt dies ohne jegliche Beschränkung hinsichtlich der Grössen der drei Kernstrecken. Dreht man nämlich in Fig. 6 die Systemebene S'' um eine zu ihrer Hauptaxe senkrechte Linie um 180^0, so dass ihre vorherige Hinterseite zur Vorderseite wird, so kommen dadurch alle drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel je unter sich in parallele Lage. Trennt man dann die drei Systemebenen durch Parallelverrückung im Raum, so sind sie in jeder parallelen Lage, für welche die drei Hauptaxen in der nämlichen Ebene liegen, räumlich orientirt; die drei Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte schneiden sich in den drei Projectionscentren. — Denkt man sich die also orientirten Systeme auf eine zu den Hauptaxen senkrechte Ebene orthogonal projicirt, wie es in den vorangehenden Paragraphen stets geschehen ist, so projiciren sie sich als drei in der *Poncelet*-Beziehung

*) In Fig. 5 sind die Kernstrecken übereinstimmend mit Fig. 4a angenommen, es ist hier: $pq+p'q' < p''q''$. Daher ist in Fig. 6 die Kernstrecke pq grösser genommen als in Fig. 5.

stehende einzelkernig-trilineare Punktreihen in paralleler Lage, wie sie im IV. Art. § 7 und 8 betrachtet worden sind.

In einer und derselben Ebene befinden sich die drei Systeme orientirt, sobald sie so liegen, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel parallel sind. Die einfachste derartige Lage ist diejenige, wo die Hauptaxen auf einander liegen, und von den zwei Kernpunkten eines Systems jeder mit seinem gegnerischen zusammenfällt, so dass sich die betreffenden Paare von gegnerischen Kernstrahlenbüscheln beiderseits decken. In Fig. 7*), welche diese Lage verbildlicht, fällt p'' mit q', und q'' mit p zusammen. Zu zwei zugeordneten Punkten x und x', die auf parallelen Strahlen durch q und p' liegen, ergiebt sich der dritte zugeordnete Punkt x'' durch den Schnitt der von den Vereinigungspunkten (q'', p) und (q', p'') nach x und x' gezogenen Strahlen. Von den drei Projectionscentren ist O'' beliebig, O fällt mit (q'', p) —, O' mit (q', p'') zusammen.

Tritt der besondere Fall ein, dass

$$pq+p'q'+p''q'' = 0 \qquad (9.)$$

ist, so fällt auch noch das dritte Kernpunktepaar (q, p') zusammen, und Fig. 7 reducirt sich zur Figur des *Menelaos*-Satzes (Fig. 8). Als Projectionscentren können die Schnittpunkte irgend dreier durch die drei Doppelkernpunkte gezogenen geraden Linien dienen. Zieht man von ihnen Strahlen nach x, x', x'', welche sich in dem nämlichen Punkte X schneiden, so entsteht die Figur des *Desargues*schen Satzes. Die drei Projectionscentren können ebensowohl in der Systemebene selbst, als in einer beliebigen Ebene durch die Hauptaxenlinie liegen. In dem durch Gleichung (9.) gekennzeichneten Falle können demgemäss die drei Systeme angesehen werden als die Projectionen eines räumlichen Systems auf die nämliche Projectionsebene von drei verschiedenen Projectionscentren aus, wie dies bereits im III. Art., § 9 erwähnt worden ist.

Es sei noch hervorgehoben, dass *jede* andere Form der doppelkernigen projectiv-trilinearen Verwandtschaft zwischen drei ebenen Systemen auf die letztbesprochene *einfachste* Form zurückgeführt oder aus ihr abgeleitet werden kann mittels collinearer Transformation der einzelnen Systeme. Denn jede der zwei Verwandtschaftsformen ist bestimmt durch die sechs Kernpunkte und irgend zwei Tripel zugeordneter Punkte, also dadurch,

*) In Fig. 7 sind die Kernstrecken wieder übereinstimmend mit Fig. 5 angenommen.

dass von jedem System vier Grundpunkte gegeben sind, von denen keine drei in gerader Linie liegen. Welche Beziehungen nun auch immer zwischen den dreimal vier Grundpunkten in jeder Verwandtschaft obwalten mögen, so können stets die vier Grundpunkte jedes Systems der einen Verwandtschaft den vier Grundpunkten des entsprechenden Systems der anderen Verwandtschaft collinear zugeordnet werden, wodurch die collineare Beziehung zwischen beiden Systemen bestimmt ist*).

Betreffs der Bedingungen, durch welche der im gegenwärtigen Paragraphen behandelte Specialfall definirt ist, ist noch Folgendes zu bemerken:

Wir sind von der Voraussetzung ausgegangen, die drei Paare von gegnerischen Kernstrahlenbüscheln seien so beschaffen, dass, wenn die drei Systeme mit in die nämliche Gerade fallenden Hauptaxen in eine Ebene gelegt werden, zwei Büschelpaare je unter sich symmetrisch liegen, das dritte Paar sich in paralleler Lage befinde, oder — was dann immer ebenfalls möglich ist — dass alle drei Büschelpaare je unter sich parallel seien. Wenn diese Voraussetzung zutrifft, und nur dann schliesst die Bedingung der Congruenz je zweier gegnerischen Kernstrahlenbüschel die Zuordnung der unendlich fernen Geraden der drei Systeme in sich, und nur dann findet die Möglichkeit der Orientirung mit parallelen Systemebenen statt. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn die Verhältnisse derart sind, dass alle drei Büschelpaare je unter sich symmetrisch liegen, oder dass ein Paar

*) In gleicher Weise kann auch jede beliebige Form der doppelkernigen *sectiv-trilinearen* Verwandtschaft durch collineare Transformation auf eine gewisse *einfachste* Form zurückgeführt werden, welche das dualistische Gegenstück zu der oben behandelten einfachsten Form der projectiv-trilinearen Verwandtschaft bildet. — Dem in diesem Paragraphen betrachteten Specialfall der projectiv-trilinearen Verwandschaft entspricht zunächst diejenige besondere Form der sectiv-trilinearen Verwandtschaft, bei welcher je zwei gegnerische Kernpunktreihen congruent sind und die drei Systemebenen im Raume so gelegt werden können, dass je zwei gegnerische Kernpunktreihen sich decken. Es ist dies dieselbe Specialform, die bereits in § 2 (letzter Absatz) erwähnt wurde. Denn es können in jener Lage irgend drei zugeordnete Geraden als die Spurgeraden einer variablen Ebene aufgefasst werden. In dem besonderen Falle nun, wo die Summe der von den Kerngeraden jedes Systems gebildeten Winkel $= 360^\circ$ ist, können die drei Systeme mit sich deckenden gegnerischen Kernpunktreihen in eine und dieselbe Ebene gelegt werden. Man hat also dann drei von einem Punkt ausgehende Geraden mit der Bestimmung, dass die Verbindungslinien irgend dreier Punkte derselben einander zugeordnet sind. Diese einfachste Form der sectiv-trilinearen Verwandtschaft ist reciprok zu der durch Fig. 8 illustrirten einfachsten Form der projectiv-trilinearen Verwandtschaft.

in symmetrischer, zwei Paare in paralleler Lage sind. Findet die eine Lage statt, so kann immer auch die andere hergestellt werden mittels Drehung eines Systems um 180° um eine zu seiner Hauptaxe senkrechte Linie. Unter diesen Umständen liegt eine andere Verwandtschaftsform vor, welche dem durch die Bedingung: Charakteristik $C = +1$ definirten Specialfall untergeordnet ist.*)

Als bemerkenswerthe Eigenschaft jeder trilinearen Verwandtschaft mit congruenten gegnerischen Kernstrahlenbüscheln ist hervorzuheben, dass die Grundrelation, welche die trilineare Beziehung der Punkte auf den drei Hauptaxen ausdrückt, nicht bloss für die Punkte der Hauptaxen gilt, sondern überhaupt für jedes beliebige Tripel zugeordneter Punkte. Im vorliegenden Falle findet also, wie sich am einfachsten aus Fig. 7 ablesen lässt, für *jedes* Punktetripel die Relation statt:

$$(10.)\qquad \frac{px}{xq}\cdot\frac{p'x'}{x'q'}\cdot\frac{p''x''}{x''q''} = -1.$$

(In dem durch Fig. 8 illustrirten ganz speciellen Falle hat man den einfachen *Menelaos*-Satz.)

Damit hängt noch eine weitere Eigenthümlichkeit des gegenwärtigen Specialfalles zusammen. Es stehen nämlich sämmtliche Tripel zugeordneter Strahlenbüschel in der *Menelaos*-Beziehung (vgl. IV. Art. § 6), bezw., wenn die Centren auf den Hauptaxen liegen, in der *Poncelet*-Beziehung (vgl. IV. Art. § 9). Denn haben die Centren a, a', a'' der drei Strahlenbüschel eine allgemeine Lage (vgl. Fig. 6), und halbirt man in zwei Büscheln die Kernwinkel, im dritten den Kern-Nebenwinkel, so schneiden die drei Halbirungslinien die Hauptaxen in drei zugeordneten Punkten; denn ihr Tripelverhältniss ist gemäss dem vorerwähnten Satze $= -1$. Hieraus aber folgt, dass die drei Winkelhalbirenden einander zugeordnet sind, das heisst, dass die trilineare Beziehung der drei Strahlenbüschel menelaisch ist**). —

*) Eine besondere Betrachtung dieses Specialfalles wird unterlassen, da er wenig Eigenartiges darbietet.

**) Eine im ersten Augenblick überraschende Erscheinung bietet der durch Gleichung (9.) gekennzeichnete besondere Fall bei der in Fig. 8 dargestellten orientirten Lage. Sind nämlich dort x, x', x'' die Centren der drei Strahlenbüschel, und sind y, y', y'' irgend drei andere zugeordnete Punkte, so stellen xy, $x'y'$, $x''y''$ drei zugeordnete Strahlen der drei Büschel vor. Da nun die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten der Dreiecke $xx'x''$ und $yy'y''$ in gerader Linie liegen, so müssen die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken, das heisst die drei zugeordneten Strahlen xy, $x'y'$, $x''y''$

Liegen die drei Centren auf den drei Hauptaxen, so sind die Strahlenbüschel einzelkernig-trilinear. Da aber die zu den Hauptaxen senkrechten Richtungen einander zugeordnet sind, so bilden in den drei Büscheln die zu den Kernstrahlen rechtwinkligen Strahlen ein zugeordnetes Tripel, die Büschel stehen also in der *Poncelet*-Beziehung (vgl. IV. Art. § 9).

Was schliesslich die ***congruenten zugeordneten Punktreihen*** anlangt, so ist hierfür wieder die Bedingungsgleichung (7.) des vorigen Paragraphen bestimmend. Nun sind in der für den gegenwärtigen Sonderfall massgebenden Fig. 5 die Dreiecke pql, $p'q'm'$, $p''q''n''$ ähnlich. Daher sind die Strecken pl, $p'm'$, $q''n''$, welche parallel mit einem ganz beliebigen Tripel zugeordneter Richtungen gezogen worden sind, den drei Kernstrecken pq, $p'q'$, $p''q''$ proportionirt. Hieraus aber folgt, dass, wenn für irgend ein Tripel zugeordneter Richtungen die mit Gleichung (7.) übereinstimmende Beziehung

$$pl+p'm'-q''n'' = 0$$

stattfindet, die analoge Beziehung auch für die drei Kernstrecken erfüllt sein muss, dann aber auch für jedes andere Tripel zugeordneter Richtungen erfüllt ist. Für die drei Kernstrecken lautet die analoge Beziehung:

$$pq+p'q'-q''p'' = 0$$

oder:

$$pq+p'q'+p''q'' = 0. \tag{9.}$$

Wir gelangen somit zu dem Ergebniss:

In dem gegenwärtigen Specialfalle existiren *im allgemeinen* keine congruenten zugeordneten Punktreihen, ausgenommen in dem besonderen Falle, wo eine Kernstrecke gleich der Summe der zwei anderen ist. In diesem Falle aber stellt *jedes* Tripel zugeordneter Richtungen ein „ausgezeichnetes" Tripel vor, parallel zu welchem es eine Schaar von Tripeln congruenter

sich in einem Punkte schneiden. Es scheint demnach, die drei Strahlenbüschel ständen nicht in der *Menelaos*-Beziehung, sondern in der *Ceva*-Beziehung, — ihre Charakteristik hätte nicht den Werth -1, sondern $+1$. Dieser Schluss wäre jedoch nur dann richtig, wenn in jedem Büschel die positiven Richtungen der Kernstrahlen nach den zwei anderen Centren zielen würden (vgl. IV. Art. § 6, 4. Abs.), was hier nicht der Fall ist, da im Centrum x'' nicht $x''x'$ und $x''x$, sondern $x''p''$ und $x''q''$ die positiven Richtungen der Kernstrahlen vorstellen. So kommt es, dass zwar die drei Winkelhalbirenden des Dreiecks $xx'x''$ ein Tripel zugeordneter Strahlen bilden, dass aber die Winkelhalbirende des Dreieckswinkels x'' nicht identisch ist mit der Halbirungslinie des Kernwinkels x'', sondern mit derjenigen des Kern-*Nebenwinkels*. Da diese mit den Halbirungslinien der Kernwinkel der zwei anderen Büschel ein Tripel zugeordneter Strahlen bildet, so ist die Charakteristik $= -1$.

zugeordneter Punktreihen giebt, so dass also unendlich viele solcher Schaaren vorhanden sind.

Dieses Resultat erhält seine weitere Erläuterung durch folgende Betrachtung:

Wir denken uns die drei Systeme in räumlicher Orientirung mit parallelen Systemebenen und zeichnen in Fig. 9 das in der Ebene der drei Hauptaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ liegende Gebilde mit den drei Projectionscentren O, O', O''. Nehmen wir nun an, die Bedingung (9.) sei erfüllt, so müssen die durch p und q'' zu OO' und $O''O'$ gezogenen Parallelen sich in einem Punkt $\varkappa'$ der Linie $\mathfrak{a}'$ schneiden. Wird daher die Linie OO'' von $\mathfrak{a}'$ in π', und von der durch O' zu den Hauptaxen gezogenen Parallelen in ω' geschnitten, so folgt aus der Aehnlichkeit der zwei Dreiecke $OO'O''$ und $p\varkappa'q''$, dass die Punktreihen $O\omega'O''$ und $p\pi'q''$ ähnlich sind. Denkt man sich also durch die drei Projectionscentren zu den Projectionsebenen Parallelebenen gelegt, so sind deren gegenseitige Abstände proportionirt den entsprechenden Abständen der drei Projectionsebenen. Nun besitzen die zwei ähnlichen Punktreihen $O\omega'O''$ und $p\pi'q''$ einen im Endlichen liegenden Doppelpunkt δ, welcher die Eigenschaft hat, dass seine Entfernungen von je zwei entsprechenden Punkten das nämliche Verhältniss haben:

$$\frac{\delta O}{\delta p} = \frac{\delta \omega'}{\delta \pi'} = \frac{\delta O''}{\delta q''}.$$

Legt man daher durch δ eine Ebene D parallel zu den drei Projectionsebenen, so theilt diese die Abstände der Projectionscentren von ihren zugehörigen Projectionsebenen im nämlichen Verhältniss. Hieraus aber folgt, dass die Projectionen des ebenen Systems D auf alle drei Projectionsebenen unter sich congruent sind, dass also jede beliebige in D liegende Punktreihe drei unter sich congruente Projectionen besitzt.

Umgekehrt ist einleuchtend, dass eine Raumgerade sich auf drei parallele Projectionsebenen nur dann mit congruenten Punktreihen projiciren kann, wenn sie in einer zu ihnen parallelen Ebene liegt, welche die Abstände der Projectionscentren von den zugehörigen Projectionsebenen im nämlichen Verhältniss theilt. Letzteres aber ist nur möglich, wenn die Abstände zwischen den durch die Projectionscentren gelegten Parallelebenen und die Abstände zwischen den zugehörigen Projectionsebenen proportionirt sind, was hinwiederum nur möglich ist, wenn die Kernstrecken der Bedingungsgleichung (9.) genügen.

Schlussbemerkung.

In den zwei zuletzt betrachteten Specialfällen war eine dreifach unendliche Zahl von Tripeln zugeordneter Geraden vorhanden, deren unendlich ferne Punkte einander zugeordnet sind. Ein weiterer Schritt in der Specialisirung wäre nun die Bestimmung, dass in *jedem* Geradentripel die unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sein sollen. Dies ist nur möglich, wenn die Kernpunkte ins Unendliche fallen, was dann weiter zur Folge hat, dass bei räumlich-orientirter Lage auch die Projectionscentren ins Unendliche fallen. Es handelt sich also um diejenige Verwandtschaftsform, welche zwischen drei *Parallelprojectionen* eines räumlichen Systems besteht. Dieser „parallelprojectiv-trilinearen Verwandtschaft“ wird der nächste Artikel gewidmet sein.

Zur Theorie der *Gauss*schen Summen und der linearen Transformation der Thetafunctionen.

(Von Herrn *Georg Landsberg*.)

Die vollständige Werthbestimmung der *Gauss*schen Summen ward ziemlich gleichzeitig von *Dirichlet* *) und *Cauchy* **) mit Hülfe von Betrachtungen gewonnen, welche auf ganz anderer Grundlage wie die Ausführungen der „*Summatio quarundam serierum*" ruhten, und welche der erstere aus der Theorie der *Fourier*schen Reihen, der letztere aus der linearen Transformation der Thetafunctionen geschöpft hatte. Dass diese beiden anscheinend verschiedenen Methoden doch ihrem wesentlichen Inhalte nach identisch sind, ward von *Kronecker* im Jahre 1880 nachgewiesen ***). Auf den folgenden Seiten soll zunächst eine andere Methode dargelegt werden, durch welche in einfacher Weise die fundamentalen Reciprocitätsbeziehungen sowohl zwischen Thetafunctionen wie zwischen *Gauss*schen Summen hergeleitet werden können. Dieses Verfahren ist demjenigen verwandt, welches *Kronecker* zur Werthbestimmung einer *specielleren Gauss*schen Summe angewendet hat †), unterscheidet sich aber von diesem in einem wesentlichen Punkte, der an der einschlägigen Stelle seine genauere Erörterung findet. Den letzten Theil der Arbeit bildet die Untersuchung jener achten Einheitswurzel, welche eine eigenthümliche Schwierigkeit bei vollständiger Durchführung der allgemeinen linearen Transformation bildet ††). Die zur Be-

---

*) *G. Lejeune Dirichlets* Werke, Bd. I, S. 237—270, S. 474—479.

**) *Liouvilles* Journal, Bd. V, S. 154—168.

***) Berliner Monatsberichte vom 29. Juli 1880 (S. 686—698) und vom 28. Oct. 1880 (S. 854—860). Vgl. auch *Festschrift*, herausgegeben von der Mathem. Gesellschaft in *Hamburg*, 1890, Th. II, S. 32—36.

†) Dieses Journal, Bd. 105, S. 267 f. und S. 345—354.

††) Man vergleiche insbesondere die Darstellungen von: *Hermite*, *Liouvilles* Journal, Sér. II, Bd. III, S. 26—37. — *Königsberger*, elliptische Functionen, 1874, Th. II, 24. Vorlesung. — *Weber*, elliptische Functionen und algebraische Zahlen, 1891, § 33.

stimmung erforderlichen Mittel werden, ohne dass eine Unterscheidung besonderer Fälle nothwendig wäre, ausschliesslich dem *Euklid*ischen Theilerverfahren entnommen; da das *Legendre-Jacobi*sche Symbol, welches in den bisherigen Darstellungen einen Factor jener Einheitswurzel bildet, ebenfalls durch einen solchen Algorithmus gewonnen wird, so scheint das hier eingeschlagene Verfahren auch bei wirklicher Durchführung der Rechnung den Vorzug zu verdienen.

I.

Die Haupttransformation, durch welche die Beziehung zwischen zwei Thetafunctionen angegeben wird, deren zweite Argumente, vom Vorzeichen abgesehen, zu einander in reciprokem Verhältnisse stehen, ergiebt sich fast unmittelbar, sobald man die Thetafunction in Form eines bestimmten Integrales von nachstehender Gestalt zu Grunde legt.

Wir wählen zu diesem Zwecke die Function:

$$(1.)\qquad \vartheta_3(\zeta,\ \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2n\zeta)};$$

in dem Gliede unter dem Summenzeichen ersetzen wir den Summationsbuchstaben n durch eine neue complexe Variable w und dividiren die so entstehende Function $e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}$ durch eine Function von w, welche für ganzzahlige Werthe der Variablen und nur für diese verschwindet, nämlich durch $(e^{2\pi iw}-1)$. Integrirt man nämlich die so erhaltene Function:

$$\frac{e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}}{e^{2\pi iw}-1}$$

in hinreichend kleinem Kreise um den Punkt $w=n$ herum, so ergiebt sich nach dem *Cauchy*schen Satze dasjenige Glied der Summe (1.), welches den Index n hat, und folglich erhält man die ϑ_3-Function, wenn man jene Function in positiver Richtung über die Begrenzung eines Flächenstückes integrirt, welches nach und nach die sämmtlichen ganzzahligen Punkte der Abscissenaxe einschliesst. Als solches Flächenstück wählen wir am einfachsten ein Rechteck $\mathfrak{P}$ von folgender Gestalt: die Seiten laufen den Coordinatenaxen parallel, und zwar haben die Parallelen zur Abscissenaxe die Gleichungen $y=+b$ und $y=-b$, die Parallelen zur Ordinatenaxe die Gleichungen $x=+(N+\frac{1}{2})$ und $x=-(N+\frac{1}{2})$, wobei b eine beliebige, für die ganze Dauer der Untersuchung festbleibende positive Grösse bedeutet,

während N eine *ganze*, unbegrenzt wachsende Zahl ist. Dann haben wir die Darstellung:

$$(2.)\qquad \vartheta_3(\zeta,\,\tau) = \lim_{N=\infty}\int_{\mathfrak{B}}\frac{e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}dw}{e^{2\pi iw}-1}.$$

Es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass die beiden Integralbestandtheile, welche von den Parallelen zur Ordinatenaxe herrühren, für wachsendes N beliebig klein werden. Denn wir haben für diese beiden Integrale:

$$w = \pm(N+\tfrac{1}{2})+iy,$$

wobei y von $-b$ bis $+b$ variirt, und daher ist der Nenner:

$$e^{2\pi iw}-1 = -(e^{-2\pi y}+1)$$

von N ganz unabhängig. Um ferner den absoluten Betrag des Zählers zu ermitteln, setzen wir mit Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile:

$$\tau = \tau_1+i\tau_2,\quad \zeta = \zeta_1+i\zeta_2,$$

dann haben wir:

$$e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)} = e^{\pi i((\tau_1+i\tau_2)(N+\frac{1}{2}\pm iy)^2+2(\zeta_1+i\zeta_2)(\pm N\pm\frac{1}{2}+iy))},$$

wobei die unteren oder oberen Zeichen zusammengehören; folglich ist:

$$\left|e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}\right| = e^{\pi(\tau_2y^2-2\zeta_1y)}.e^{-\pi(\tau_2(N+\frac{1}{2})^2\pm2(\tau_1y+\zeta_2)(N+\frac{1}{2}))}$$

$$= e^{\pi\left(\tau_2y^2-2\zeta_1y+\frac{(\tau_1y+\zeta_2)^2}{\tau_2}\right)}.e^{-\pi\tau_2\left(N+\frac{1}{2}\pm\frac{\tau_1y+\zeta_2}{\tau_2}\right)^2}.$$

Bezeichnet man also den kleinsten Werth, den $\frac{1}{2}\pm\frac{\tau_1y+\zeta_2}{\tau_2}$ auf dem Integrationswege annimmt, mit c, so findet man, dass jedes der beiden Integrale dem absoluten Betrage nach kleiner ist als:

$$e^{-\pi\tau_2(N+c)^2}\int_{-b}^{+b}\frac{e^{-\pi\left(\tau_2y^2-2\zeta_1y+\frac{(\tau_1y+\zeta_2)^2}{\tau_2}\right)}dy}{e^{-2\pi y}+1},$$

und da, wie bekannt, τ_2 jederzeit eine positive Grösse ist, so convergiren die Integrale in der That für wachsendes N gegen Null.

Hiernach bleiben nur die Integralbestandtheile, welche von den Parallelen zur Abscissenaxe herrühren, übrig, und man erhält die Darstellung:

$$(3.)\qquad \vartheta_3(\zeta,\,\tau) = \int_{\substack{x=-\infty \\ (w=-ib+x)}}^{x=+\infty}\frac{e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}dw}{e^{2\pi iw}-1}-\int_{\substack{x=-\infty \\ (w=+ib+x)}}^{x=+\infty}\frac{e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}dw}{e^{2\pi iw}-1}.$$

Entwickelt man jetzt den Integranden in eine geometrische Reihe, so hat man, da der absolute Betrag von $e^{2\pi iw}$ im ersten Integrale grösser, im

zweiten kleiner als Eins ist, in jenem die Reihenentwickelung:

$$\frac{1}{e^{2\pi i w}-1} = \sum_h e^{2h\pi i w}, \qquad (h=-1,\,-2,\,-3,\,\ldots)$$

in diesem die Entwickelung:

$$\frac{1}{e^{2\pi i w}-1} = -\sum_h e^{2h\pi i w} \qquad (h=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

anzuwenden, wodurch sich ergiebt:

$$\vartheta_3(\zeta,\tau) = \int_{\substack{x=-\infty \\ (w=-ib+x)}}^{x=+\infty} e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}dw \sum_{h=-1}^{h=-\infty} e^{2h\pi i w} + \int_{\substack{x=-\infty \\ (w=+ib+x)}}^{x=+\infty} e^{\pi i(w^2\tau+2w\zeta)}dw \sum_{h=0}^{h=\infty} e^{2h\pi i w}.$$

Kehrt man in diesen Integralen die Reihenfolge der Summation und Integration um, so erhält man nach leichter Umformung:

$$\vartheta_3(\zeta,\tau) = \sum_{h=-1}^{h=-\infty} e^{-\pi i\frac{(\zeta+h)^2}{\tau}} \int_{\substack{x=-\infty \\ (w=-ib+x)}}^{x=+\infty} dw\, e^{\pi i\tau\left(w+\frac{\zeta+h}{\tau}\right)^2}$$

$$+\sum_{h=0}^{h=\infty} e^{-\pi i\frac{(\zeta+h)^2}{\tau}} \int_{\substack{x=-\infty \\ (w=ib+x)}}^{x=+\infty} dw\, e^{\pi i\tau\left(w+\frac{\zeta+h}{\tau}\right)^2}.$$

Alle die hier auftretenden Integrale sind von der Form:

$$\int e^{\pi i\tau w^2}dw,$$

wenn dieses Integral der Reihe nach über die sämmtlichen Geraden einer Schaar von Parallelen zur Abscissenaxe erstreckt wird. Man beweist aber mit denselben Mitteln, wie sie vorher in Anwendung gekommen sind, dass die Integrale den Werth nicht ändern, wenn sie anstatt über die verschiedenen Parallelen zur Abscissenaxe sämmtlich über diese Axe selbst erstreckt werden; denn in den Zusatzintegralen, deren Wege der Ordinatenaxe parallel sind, kann der absolute Betrag des Integranden ebenso wie dort unter jeden Grad der Kleinheit herabgedrückt werden. Daher tritt das Integral vor das Summenzeichen, die beiden Summen schliessen sich an einander an und man erhält:

$$(4.) \qquad \vartheta_3(\zeta,\tau) = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} e^{-\pi i\frac{(\zeta+h)^2}{\tau}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{\pi i\tau x^2}.$$

Da aber die hier auftretende Summe nichts anderes ist als

$$e^{-\pi i\frac{\zeta^2}{\tau}} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} e^{\pi i\left(-\frac{h^2}{\tau}-2h\frac{\zeta}{\tau}\right)} = e^{-\pi i\frac{\zeta^2}{\tau}}\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{\tau},\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

so hat man:

$$(4^a.) \qquad e^{\pi i\frac{\zeta^2}{\tau}}\vartheta_3(\zeta,\,\tau) = \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{\tau},\,-\frac{1}{\tau}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,e^{\pi i\tau x^2}.$$

Zur Ermittelung des Integrales bezeichnen wir mit $(\sqrt{-i\tau})$ denjenigen Werth der Quadratwurzel, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, und setzen:

$$(\sqrt{-i\tau})x = u,$$

dann ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,e^{\pi i\tau x^2} = \frac{1}{(\sqrt{-i\tau})}\int du\,e^{-\pi u^2},$$

das Integral auf der rechten Seite der Gleichung über eine Gerade durch den Nullpunkt erstreckt, welche mit der reellen Axe einen Winkel bildet, der gleich der Amplitude von $(\sqrt{-i\tau})$ ist. Dieser Winkel liegt, weil die imaginäre Coordinate τ_2 von τ positiv ist, innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$, und daher kann das Integral anstatt über die angegebene Gerade auch in positiver Richtung über die x-Axe erstreckt werden. Denn die Zusatzintegrale, welche auftreten, sind von der Form:

$$\lim_{\omega=\infty}\int_{y=0}^{y=\varepsilon\omega} du\,e^{-\pi u^2}, \quad (u = \pm\omega+iy)$$

wobei ε ein positiver oder negativer echter Bruch, nämlich die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels jener Geraden ist. Der absolute Betrag dieses Zusatzintegrales ist aber kleiner als:

$$\int_0^{\varepsilon\omega} dy\,e^{-\pi(\omega^2-y^2)} \leqq |\varepsilon|\,\omega\,e^{-\pi\omega^2(1-\varepsilon^2)}$$

und wird daher, weil $\varepsilon^2 < 1$ ist, für wachsendes ω beliebig klein. Daher ist:

$$(\sqrt{-i\tau})e^{\frac{\pi i\zeta^2}{\tau}}\vartheta_3(\zeta,\,\tau) = \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{\tau},\,-\frac{1}{\tau}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} du\,e^{-\pi u^2},$$

und da der Werth des von ζ und τ unabhängigen Integrales gleich Eins ist, — wie man erkennt, wenn man $\zeta = 0$, $\tau = i$ setzt —, so hat man die Haupttransformation der Thetafunction erhalten:

$$(5.) \qquad \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{\tau},\,-\frac{1}{\tau}\right) = (\sqrt{-i\tau})e^{\frac{\pi i\zeta^2}{\tau}}\vartheta_3(\zeta,\,\tau).$$

II.

Setzt man in der Gleichung (5.) $\zeta = 0$, so ergiebt sich:

$$(6.)\qquad \vartheta_3\left(0, -\frac{1}{\tau}\right) = (\sqrt{-i\tau})\vartheta_3(0, \tau),$$

eine Gleichung, welche offenbar auf dem angegebenen Wege auch direct, d. h. ohne Zuhülfenahme jener allgemeineren Relation erhalten werden kann. Lässt man in dieser Gleichung τ einem rationalen Punkte der reellen Axe nahe rücken, indem man:

$$\tau = -\frac{\lambda}{\mu} + i\varrho^2$$

setzt und für $\varrho = 0$ zur Grenze übergeht, so wird $\vartheta_3(0, \tau)$ in der Weise unendlich, dass $\lim\limits_{\varrho=0}(\varrho\vartheta_3(0, \tau))$ gleich einer endlichen Grösse wird. Denn es ist, wenn man $n = 2\mu\varkappa + r$ setzt und $\varkappa$ alle ganzen Zahlen, r ein vollständiges Restsystem (mod. 2μ) durchlaufen lässt:

$$\varrho\vartheta_3(0, \tau) = \varrho\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2\pi i\left(-\frac{\lambda}{\mu}+i\varrho^2\right)} = \varrho\sum_{r=0}^{r=|2\mu|-1} e^{-r^2\pi i\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty} e^{-\pi\varrho^2(r+2\mu\varkappa)^2},$$

also, wenn man die Grenzen der Summe als unendlich gross auch gegenüber der Grösse $\frac{1}{\varrho}$ annimmt:

$$\lim_{\varrho=0}\left(\varrho\vartheta_3\left(0, -\frac{\lambda}{\mu}+i\varrho^2\right)\right) = \sum_{r=0}^{r=|2\mu|-1} e^{-r^2\pi i\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{|2\mu|}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}du.$$

Setzt man also die über ein vollständiges Restsystem (mod. 2μ) erstreckte Summe:

$$(7.)\qquad \frac{1}{2}\sum_r e^{-r^2\pi\frac{\lambda i}{\mu}} = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right),$$

so hat man:

$$(7^a.)\qquad \lim_{\varrho=0}\left(\varrho\vartheta_3\left(0, -\frac{\lambda}{\mu}+i\varrho^2\right)\right) = \frac{1}{|\mu|}G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right).$$

Ferner ist:

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu}-i\varrho^2} = \frac{\mu}{\lambda} + i\frac{\mu^2}{\lambda^2}\varrho^2$$

bis auf unendlich kleine Grössen vierter Ordnung, und folglich hat man:

$$(7^b.)\qquad \lim_{\varrho=0}\left(\varrho\vartheta_3\left(0, -\frac{1}{\tau}\right)\right) = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right| G\left(-\frac{\mu i}{\lambda}\right) = \frac{1}{|\mu|}G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right).$$

Setzt man die Grenzwerthe (7^a.) und (7^b.) in die Gleichung (6.) ein, so erhält man die Reciprocitätsbeziehung zwischen *Gauss*schen Summen:

$$(8.)\qquad G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right) = \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right).$$

Nun erscheint es aber von Wichtigkeit, dass diese fundamentale Reciprocitätsbeziehung sich unabhängig von der Transformationsgleichung der Thetafunction ableiten lässt, sobald man die angewendete Methode ein wenig umgestaltet.

Um die Untersuchung in Rücksicht auf das Folgende sogleich etwas allgemeiner zu führen, gehen wir von der Summe aus:

$$\sum_r e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r),$$

in welcher r ein vollständiges Restsystem (mod. μ) durchläuft und die Function unter dem Summenzeichen von der Beschaffenheit sein soll, dass $f(r)$ nur von dem *Klassenwerthe* der Zahl r (mod. μ) abhängt. Demgemäss setzen wir von der Function $f(w)$, ausser dass sie in der Umgebung der x-Axe eindeutig und stetig ist, auch noch voraus, dass sie der Functionalgleichung:

$$(9.)\qquad f(w+\mu) = (-1)^{\lambda\mu} f(w)$$

genüge. Dann ist ähnlich, wie vorher:

$$(10.)\qquad \sum_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = \int \frac{e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(w)dw}{e^{2w\pi i}-1},$$

und zwar ist das Integral über die Begrenzung eines Rechtecks zu erstrecken, dessen eines Seitenpaar die Gleichungen $x = -\frac{1}{2}$ und $x = |\mu| - \frac{1}{2}$ hat, während das andere Seitenpaar durch die Gleichungen $y = +b$ und $y = -b$ dargestellt wird. Entwickelt man nun den Integranden in eine geometrische Reihe, so hat man, je nachdem die imaginäre Coordinate y von w positiv oder negativ ist, die erste oder die zweite der beiden Identitäten:

$$\frac{1}{e^{2w\pi i}-1} = -\sum_{h=0}^{h=N-1} e^{2hw\pi i} + \frac{e^{2Nw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1},$$

$$\frac{1}{e^{2w\pi i}-1} = \sum_{h=-1}^{h=-N} e^{2hw\pi i} + \frac{e^{-2Nw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1}$$

anzuwenden. Daher muss man das Integral in der Gleichung (10.) in zwei Theile zerlegen, von denen sich der eine auf die obere, der andere auf die untere Hälfte der Begrenzungslinie bezieht, wodurch man erhält:

$$(11.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = -\int\limits_{+} e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(w)\,dw \sum\limits_{h=0}^{h=N-1} e^{2hw\pi i} \\ \qquad\qquad + \int\limits_{-} e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(w)\,dw \sum\limits_{h=-1}^{h=-n} e^{2hw\pi i} + \varepsilon, \end{cases}$$

$$(12.)\quad \varepsilon = \int\limits_{+} \frac{e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}+2Nw\pi i} f(w)\,dw}{e^{2w\pi i}-1} + \int\limits_{-} \frac{e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}-2Nw\pi i} f(w)\,dw}{e^{2w\pi i}-1};$$

hierbei ist den Integralen das Zeichen + oder — zugesetzt, je nachdem in dem Theile der Begrenzungslinie, auf den sie sich beziehen, die Coordinate y positiv oder negativ ist.

Um nun zu beweisen, dass die Grösse ε mit wachsendem N verschwindet, machen wir von der *Willkürlichkeit* der Grösse b Gebrauch und setzen $b = \frac{1}{\sqrt{N}}$, so dass $\frac{1}{b}$ bei zunehmenden N zwar beliebig gross wird, aber gegenüber N unendlich klein bleibt. Bei dieser Annahme folgt nämlich, dass der absolute Betrag eines jeden der sechs geradlinigen Integrale, in welche die rechte Seite der Gleichung (12.) zerlegt werden kann, beliebig klein gemacht werden kann. Denn was zunächst die beiden Integrale angeht, deren Wege der x-Axe parallel sind, so ist für diese der absolute Betrag von $e^{2Nw\pi i}$, resp. von $e^{-2Nw\pi i}$ gleich $e^{-2\pi\sqrt{N}}$, die vier Integrale, deren Wege der y-Axe parallel sind, verschwinden aber darum, weil der Integrand endlich und die Länge des Integrationsweges gleich $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ist.

Da also in der That ε für wachsendes N gegen Null convergirt, so folgt, wenn man die Integrale der rechten Seite der Gleichung (11.), anstatt über die vorher angegebene Begrenzung, über die reelle Axe erstreckt und sodann zusammenfasst, die Gleichung:

$$(13.)\quad \sum_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = \lim_{N=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+|\mu|} e^{-w^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(w)\,dw \sum_{h=-N}^{h=N-1} e^{2hw\pi i}.$$

Kehrt man hier die Reihenfolge der Summation und Integration um, so ergiebt sich nach leichter Umformung:

$$\sum_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = \lim_{N=\infty} \sum_{h=-N}^{h=N-1} e^{\frac{\pi i h^2\mu}{\lambda}} \int_{-\frac{1}{2}-\frac{h\mu}{\lambda}}^{-\frac{1}{2}-\frac{h\mu}{\lambda}+|\mu|} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}w^2} f\left(w+\frac{h\mu}{\lambda}\right)dw,$$

oder wenn man $h = \lambda\varkappa + s$ setzt und s ein vollständiges Restsystem mod. λ,

$\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen lässt, mit Benutzung der Gleichung (9.):

$$\sum_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = \sum_{s=0}^{s=|\lambda|-1} e^{\frac{\pi i s^2\mu}{\lambda}} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}-\frac{s\mu}{\lambda}-\mu\varkappa}^{-\frac{1}{2}-\frac{s\mu}{\lambda}-\mu\varkappa+|\mu|} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}w^2} f\left(w+\frac{s\mu}{\lambda}\right)dw.$$

Daher gilt die Reciprocitätsgleichung:

$$(14.)\qquad \sum_r e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} f(r) = \sum_s e^{s^2\frac{\pi i\mu}{\lambda}} \varphi(s) \qquad \binom{r=0,\,1,\,\ldots,\,|\mu|-1}{s=0,\,1,\,\ldots,\,|\lambda|-1},$$

in welcher die Function φ durch die Gleichung:

$$(15.)\qquad \varphi(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}x^2} f\left(x+\frac{w\mu}{\lambda}\right)dx$$

definirt ist und folglich die der Gleichung (9.) entsprechende Periodicität:

$$(16.)\qquad \varphi(w+\lambda) = (-1)^{\lambda\mu}\varphi(w)$$

besitzt. Offenbar kann man also umgekehrt die Function f durch ein bestimmtes Integral mit Hülfe der Function φ ausdrücken.

Für unsere Zwecke genügt es,

$$f(w) = e^{\frac{\pi i\nu w}{\mu}}$$

zu setzen, wobei nach (9.) die ganze Zahl $\nu \equiv \lambda\mu$ (mod. 2) sein muss. Dann ist:

$$\varphi(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}x^2+\frac{\pi i\nu}{\mu}x+\frac{\pi i\nu}{\lambda}w} dx$$

$$= e^{\frac{\pi i\nu}{\lambda}w+\frac{\pi i\nu^2}{4\mu\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}x^2} dx.$$

Daher geht die Gleichung (14.) über in:

$$(17.)\qquad \sum_r e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}+r\frac{\pi i\nu}{\mu}} = \sum_s e^{s^2\frac{\mu\pi i}{\lambda}+s\frac{\pi i\nu}{\lambda}+\frac{\pi i\nu^2}{4\mu\lambda}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda\pi i}{\mu}x^2} dx$$

oder auch in:

$$(17^a.)\qquad \sum_r e^{-\frac{\pi i}{\mu}\left(\lambda r^2-\nu r+\frac{\nu^2}{8\lambda}\right)} = \sum_s e^{\frac{\pi i}{\lambda}\left(\mu s^2+\nu s+\frac{\nu^2}{8\mu}\right)}.\left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm\pi i x^2} dx,$$

und in dem letzten Integrale gilt das negative oder das positive Zeichen, je nachdem $\frac{\lambda}{\mu}$ positiv oder negativ ist. Den Werth des Integrales findet

man, indem man $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$1 = (1+e^{i\frac{\pi}{2}})\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x^2}\,dx,$$

also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm\pi i x^2}\,dx = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{\pm i}).$$

Da nun:

$$\left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right|\cdot\left(\sqrt{-i\,\mathrm{sgn}.\frac{\lambda}{\mu}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda i}}\right)$$

ist, so kann man die Gleichung (17.) auch auf die Form bringen:

$$(17^b.)\qquad \sum_r e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}+r\frac{\pi i\nu}{\mu}} = \sum_s e^{\frac{\mu\pi i}{\lambda}\left(s+\frac{\nu}{2\mu}\right)^2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda i}}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\nu = 0$, so hat man, weil $\lambda\mu \equiv \nu$ (mod. 2) ist, von den beiden Zahlen λ und μ die eine als gerade, die andere als ungerade anzunehmen, wodurch man erhält:

$$(17^c.)\qquad \sum_{r=0}^{r=|\mu|-1} e^{-r^2\frac{\lambda\pi i}{\mu}} = \sum_{s=0}^{s=|\lambda|-1} e^{\frac{\mu\pi i}{\lambda}s^2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda i}}\right);$$

diese Gleichung stimmt aber ihrem Inhalte nach genau mit der Gleichung (8.) überein, denn man erkennt leicht, dass die durch die Gleichung (7.) definirte Summe $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ verschwindet, falls λ und μ beide ungerade sind, und mit der linken Seite obiger Gleichung übereinstimmt, wenn $\lambda\mu$ gerade ist.

Aus der Gleichung (17^c.) ergiebt sich der Werth der *Dirichlet*schen Summe $\varphi(1, n) = \sum_{r=0}^{r=n-1} e^{\frac{2\pi i r^2}{n}}$ *) unmittelbar; setzt man nämlich $\lambda = -2$, $\mu = n$, so findet man zunächst für ungerades positives n:

$$(18.)\qquad \sum_{r=0}^{r=n-1} e^{\frac{2\pi i r^2}{n}} = (1-i^n)\left(\sqrt{\frac{ni}{2}}\right) = \frac{1-i^n}{1-i}\sqrt{n},$$

setzt man aber $\mu = 1$, $\lambda = \frac{n}{2}$, so erhält man für $n \equiv 0$ (mod. 4):

$$(18^a.)\qquad \sum_{r=0}^{r=n-1} e^{\frac{2\pi i r^2}{n}} = 2\cdot\left(\sqrt{\frac{ni}{2}}\right) = (1+i)\sqrt{n}.$$

---

*) S. Werke, Bd. I, S. 476.

Diese letzten beiden Gleichungen sind selbständig, ohne Rückgang auf die allgemeinere Reciprocitätsgleichung (17^c.) von *Kronecker* in den im Eingange erwähnten Aufsätzen im 105. Bande dieses Journals mit Hülfe einer Methode hergeleitet worden, mit welcher die unserige die Darstellung der *Gauss*schen Summe als complexes Integral gemein hat. Beide Methoden unterscheiden sich dadurch, dass dort die Ausdehnung des Rechtecks in der Richtung der y-Axe, hier die Entwickelung in die geometrische Reihe und die Zusammendrückung des Rechtecks das Resultat hervorbringt. Versuche, das *Kronecker*sche Verfahren direct zur Herleitung der *Reciprocitätsbeziehung* zwischen *Gauss*schen Summen zu benutzen, haben zu keinem Ergebnisse geführt. —

Aus der Gleichung (17^c.) können mit Hülfe elementarer Eigenschaften der *Gauss*schen Summen deren Werthe hergeleitet werden. Man gelangt so zu den Formeln:

$$(19.)\qquad G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(\sqrt{\mu}),\quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right)=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)(\sqrt{2\lambda i}),$$

in welchen die Zahl $\mu\equiv 1 \pmod{4}$ vorausgesetzt ist und unter dem Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, resp. $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ das *Legendre-Jacobi*sche Symbol zu verstehen ist. Dabei hat man, falls der Nenner gerade ist, für $\left(\frac{\mu}{\pm 2}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 anzunehmen, je nachdem $\mu\equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ ist, und im übrigen mit diesem Symbol nach den bekannten Regeln zu rechnen. Ueberdies muss zur Ergänzung des Früheren hinzugefügt werden, dass unter dem Zeichen $(\sqrt{n})$, falls n negativ ist, der Werth $+i|\sqrt{n}|$ zu verstehen ist.

Beiläufig sei erwähnt, dass zuweilen die Formeln:

$$(19^a.)\quad G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)e^{\frac{\pi i}{4}(\mu-1)}|\sqrt{\mu}|,\quad G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right)=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)e^{\frac{\pi i\mu}{4}}|\sqrt{\lambda}|\quad \left(\begin{smallmatrix}\lambda\equiv 0\\ \mu\equiv 1\end{smallmatrix} \pmod{2}\right)$$

zur Rechnung geeigneter sind; hierin sind die Nenner μ, resp. λ als positiv vorausgesetzt und unter dem Zeichen $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ ist, falls $\mu\equiv 3 \pmod{4}$ dasselbe wie unter dem Zeichen $\left(\frac{-\mu}{\lambda}\right)$ zu verstehen.

III.

Die allgemeine lineare Transformation der Thetafunctionen macht, wie bekannt, schliesslich die Bestimmung einer Constanten nöthig, mit deren Bedeutung und Auswerthung wir uns hier beschäftigen wollen. Um

diese Grösse in einfachster Form der Untersuchung zu Grunde legen zu können, sei es gestattet, den Gang der Rechnung noch einmal in aller Kürze anzugeben.

Wählen wir zu diesem Zwecke die ϑ_1-Function:

$$(20.)\qquad \vartheta_1(\zeta,\ \tau)\ =\ \sum_\nu e^{\frac{1}{4}\pi i(\nu^2\tau+4\nu\zeta-2\nu)} \qquad (\nu=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots)$$

und setzen wir:

$$(21.)\qquad \tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},\quad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta},$$

worin die vier ganzen Zahlen $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ der Relation:

$$(22.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma\ =\ 1$$

genügen sollen. Löst man die erste Gleichung (21.) auf in:

$$\alpha\tau+\beta = \sigma\tau',\quad \gamma\tau+\delta = \sigma,$$

so folgt umgekehrt:

$$\tau = \sigma(\delta\tau'-\beta),\quad 1 = \sigma(-\gamma\tau'+\alpha),$$

also:

$$(22.)\qquad \begin{cases} (\gamma\tau+\delta)(\delta\tau'-\beta) = \tau, & (\gamma\tau+\delta)(-\gamma\tau'+\alpha) = 1, \\ \dfrac{\zeta+1}{\gamma\tau+\delta} = \zeta'-\gamma\tau'+\alpha, & \dfrac{\zeta+\tau}{\gamma\tau+\delta} = \zeta'+\delta\tau'-\beta, \\ \tau = \dfrac{\delta\tau'-\beta}{-\gamma\tau'+\alpha}, & \zeta = \dfrac{\zeta'}{-\gamma\tau'+\alpha}. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die Function $\vartheta_1(\zeta',\tau')$ mit $e^{-\gamma\zeta\zeta'\pi i}$, so kann man das Product leicht in die Form setzen:

$$(23.)\quad \Phi(\zeta) = e^{-\gamma\zeta\zeta'\pi i}\vartheta_1(\zeta',\ \tau') = \sum_\nu e^{\frac{1}{4}\pi i\nu^2\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{2}\pi i\nu-\frac{\pi i\gamma}{\gamma\tau+\delta}\left(\zeta-\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2}, \quad (\nu=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots)$$

und da sich hieraus, wenn man ζ durch $\zeta+r+s\tau$ ersetzt und gleichzeitig den Summationsbuchstaben ν in $\nu+2(\gamma r-\delta s)$ umändert, ohne weiteres die Functionalgleichung:

$$\Phi(\zeta+r+s\tau)\ =\ (-1)^{r+s}e^{-\pi i(2s\zeta+s^2\tau)}\Phi(\zeta)$$

ergiebt, so folgt, dass $\Phi(\zeta)$ bis auf einen von ζ unabhängigen Factor mit der Thetafunction (20.) identisch ist. Die Bestimmung der Constanten C in der Gleichung:

$$(24.)\qquad \Phi(\zeta) = e^{-\gamma\zeta\zeta'\pi i}\vartheta_1(\zeta',\ \tau') = C\vartheta_1(\zeta)$$

ergiebt der *Laurent*sche Satz in der Form:

$$C\ =\ \frac{1}{i}\int\Phi(\zeta)e^{\pi i(\zeta-\frac{1}{4}\tau)}d\zeta,$$

worin das Integral von einem willkürlichen Punkte t in geradliniger Richtung nach dem Punkte $t+1$ erstreckt ist, und hieraus erhält man durch Einsetzen des Werthes von $\Phi(\zeta)$:

$$(25.)\quad C = \frac{1}{i}\int_t^{t+1} d\zeta \sum_\nu e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(a\nu^2-2(\gamma-1)\nu+\delta)}\, e^{-\frac{\pi i\gamma}{\gamma\tau+\delta}\left(\zeta-\frac{\nu}{2\gamma}-\frac{\gamma\tau+\delta}{2\gamma}\right)^2}.$$

Nun erkennt man sogleich, dass von den beiden unter dem Summenzeichen stehenden Factoren der erste nur von dem *Klassenwerthe* der ungeraden Zahl ν mod. 2γ abhängig ist; ersetzt man nämlich in ihm ν durch $\nu+2\gamma$ und bildet den Quotienten beider Exponentialgrössen, so erhält man:

$$e^{\pi i(a\gamma+a\nu-\gamma+1)} = 1.$$

Setzt man also $\nu = 2\gamma n+r$, und lässt n alle positiven und negativen ganzen Zahlen, r ein *ungerades* Restsystem mod. 2γ durchlaufen, so ergiebt sich schliesslich bei passender Ordnung der Folge der Summationen und der Integration:

$$C = \frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(ar^2-2(\gamma-1)r+\delta)} \sum_n \int_t^{t+1} d\zeta\, e^{-\frac{\pi i\gamma}{\gamma\tau+\delta}\left(\zeta-\frac{\gamma\tau+\delta+r}{2\gamma}-n\right)^2}$$

$$= \frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(ar^2-2(\gamma-1)r+\delta)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{\pi i\gamma}{\gamma\tau+\delta}x^2},$$

worin das Integral über die reelle Axe oder eine Parallele zu ihr erstreckt ist. Setzt man den Werth des Integrales ein, so hat man die Gleichung:

$$(26.)\quad \vartheta_1\left(\frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta},\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\gamma\pi i\zeta^2}{\gamma\tau+\delta}}\left(\sqrt{\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma i}}\right)\vartheta_1(\zeta,\ \tau)\cdot\frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(ar^2-2(\gamma-1)r+\delta)},$$

in welcher der Summationsindex r die Zahlen $1, 3, \ldots, |2\gamma|-1$ oder irgend ein anderes ungerades Restsystem mod. 2γ durchläuft.

Die weitere Untersuchung hat sich mit der in der letzten Gleichung auftretenden Summe zu beschäftigen. Dieselbe lässt sich ohne Schwierigkeit auf die Form der vorher betrachteten *Gauss*schen Summen bringen. Denn da man leicht beweist, dass die Umformung:

$$\frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(ar^2-2(\gamma-1)r+\delta)} = e^{\pi i(\frac{1}{4}\delta\beta+\frac{1}{2}(\delta-1))}\sum_r e^{\frac{\pi i a}{\gamma}\left(\frac{r+\delta}{2}\right)^2-\pi i(\beta+1)\frac{r+\delta}{2}}$$

zulässig ist, so erhält man, wenn δ ungerade ist:

$$\frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(ar^2-2(\gamma-1)r+\delta)} = e^{\pi i(\frac{1}{4}\delta\beta+\frac{1}{2}(\delta-1))}\sum_{x=0}^{x=|\gamma|-1} e^{\pi i\frac{a}{\gamma}x^2}(-1)^{(\beta+1)x}$$

$$= e^{\pi i(\frac{1}{4}\delta\beta+\frac{1}{2}(\delta-1))}\sum_{x=0}^{x=|\gamma|-1} e^{\frac{\pi i}{\gamma}x^2(a+\beta\gamma+\gamma)},$$

und wenn δ gerade ist:

$$\frac{1}{i}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(\alpha r^2-2(\gamma-1)r+\delta)} = (-1)^{\frac{\beta+\delta+1}{2}}\, e^{\frac{\pi i}{4}(\delta\beta+\alpha\gamma-2)} \sum_{x=0}^{x=|\gamma|-1} e^{\frac{\pi i\alpha}{\gamma}x^2}(-1)^{\alpha x}$$

$$= (-1)^{\frac{\beta+\delta+1}{2}}\, e^{\frac{\pi i}{4}(\delta\beta+\alpha\gamma-2)} \sum_{x=0}^{x=|\gamma|-1} e^{\frac{\pi i\alpha(\gamma+1)}{\gamma}x^2},$$

und auf diese Darstellungen können die Formeln (19.) oder (19^a.) direct angewendet werden. Der Werth der Summe ist also, abgesehen von einer achten Einheitswurzel, gleich $\sqrt{\gamma}$. Da aber hierbei ohne zureichenden Grund stets mehrere Fälle unterschieden werden müssen, so ist es besser, an dem Summenausdrucke selbst, wie er sich in naturgemässer Weise ergeben hat, die Veränderungen zu betrachten, welche er bei elementaren Transformationen erleidet.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$(27.)\qquad \frac{1}{i|\sqrt{\gamma}|}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(\alpha r^2-2(\gamma-1)r+\delta)} = S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix},$$

wodurch die Gleichung (26.) in folgende übergeht:

$$(28.)\qquad \vartheta_1\left(\frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta},\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\gamma\zeta^2\pi i}{\gamma\tau+\delta}}.\left(\sqrt{e^{-\frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sgn}.\gamma}(\gamma\tau+\delta)}\right).S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\cdot\vartheta_1(\zeta,\tau).$$

Zunächst folgen unmittelbar aus der Definition die Gleichungen:

$$(29.)\qquad \begin{cases} S\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{i}e^{\frac{\pi i\delta}{4}}, \quad S\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \delta\end{pmatrix} = ie^{-\frac{\pi i\delta}{4}}, \\ S\begin{pmatrix}\alpha+x\gamma, & \beta+x\delta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi ix}{4}}S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix}-\alpha, & -\beta\\ -\gamma, & -\delta\end{pmatrix} = -S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Bringt man ferner $S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ auf die Form:

$$S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{i|\sqrt{\gamma}|}\sum_{x=0}^{x=|\gamma|-1} e^{\frac{\pi i}{\gamma}\left(\alpha x^2+(\alpha-\gamma+1)x+\frac{\alpha+\delta}{4}-\frac{\gamma-1}{2}\right)},$$

so kann man die Reciprocitätsgleichung (17.) des vorigen Abschnittes in Anwendung bringen, indem man in ihr $\mu=\gamma$, $\lambda=-\alpha$, $\nu=\alpha-\gamma+1$ setzt. Man erhält hierdurch nach einigen Umformungen die Hauptrelation:

$$(30.)\qquad S\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn}.(\alpha\gamma)}S\begin{pmatrix}\gamma, & \delta\\ -\alpha, & -\beta\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn}.(\alpha\gamma)}S\begin{pmatrix}-\gamma, & -\delta\\ \alpha, & \beta\end{pmatrix},$$

eine Gleichung, die man natürlich auch wieder direct ableiten kann, indem

man die Methode des vorigen Abschnittes auf die Darstellung:

$$S\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta} = \frac{i}{2\sqrt{\gamma}}\cdot\int\frac{e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(\alpha w^2-2(\gamma-1)w+\delta)}dw}{e^{\pi i w}+1}$$

anwendet; das Integral ist über die Begrenzung eines Rechtecks zu erstrecken, dessen eines Seitenpaar durch die Punkte 0 und 2γ parallel zur Ordinatenaxe hindurchgeht.

Die Grösse $S\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ ist durch die Gleichung (27.) nur für ein von Null verschiedenes γ definirt worden, aber die soeben abgeleiteten Compositionsregeln zeigen sofort, welchen Werth man anzunehmen hat, falls $\gamma = 0$ ist; denn die Gleichung (30.) ergiebt:

$$S\binom{1,\ \beta}{0,\ 1} = e^{-\frac{\pi i}{2}}S\binom{0,\ \ 1}{-1,\ -\beta},$$

also muss:

$$(31.)\qquad S\binom{1,\ \beta}{0,\ 1} = e^{\frac{\pi i\beta}{4}},\quad S\binom{-1,\ \beta}{0,\ 1} = -e^{-\frac{\pi i\beta}{4}}$$

gesetzt werden. Da nun:

$$\vartheta_1(\zeta,\ \tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(\zeta,\ \tau)$$

ist, so erkennt man, dass bei der getroffenen Festsetzung die Gleichung (28.) ohne weiteres in Geltung bleibt, falls $\gamma = 0$ und $\delta = +1$ ist; ist aber $\gamma = 0$ und $\delta = -1$, so muss auf der rechten Seite der Factor i, der sich als Werth der Quadratwurzel ergiebt, fortfallen.

Die Berechnung des Symbols gestaltet sich jetzt folgendermaassen. Wir setzen $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \delta_1$ und nehmen eine Kette von Gleichungen an:

$$(32.)\quad \begin{cases}\gamma+\varkappa_1\gamma_1+\gamma_2 = 0,\quad \gamma_1+\varkappa_2\gamma_2+\gamma_3 = 0,\quad \gamma_2+\varkappa_3\gamma_3+\gamma_4 = 0,\quad \ldots,\\ \qquad\gamma_{\nu-1}+\varkappa_\nu\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1} = 0,\quad \gamma_\nu+\varkappa_{\nu+1}\gamma_{\nu+1} = 0\end{cases}$$

von der zunächst nur das Eine vorausgesetzt werden mag, dass sie abbricht, so dass also $\gamma_{\nu+1} = \pm 1$, $\gamma_{\nu+2} = 0$ ist. Mit Hülfe der so gewonnenen ganzen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu, \varkappa_{\nu+1}$ berechnen wir durch eine correspondirende Kette von Gleichungen:

$$(32.^a)\quad \begin{cases}\delta+\varkappa_1\delta_1+\delta_2 = 0,\quad \delta_1+\varkappa_2\delta_2+\delta_3 = 0,\quad \delta_2+\varkappa_3\delta_3+\delta_4 = 0,\quad \ldots,\\ \qquad\delta_{\nu-1}+\varkappa_\nu\delta_\nu+\delta_{\nu+1} = 0,\quad \delta_\nu+\varkappa_{\nu+1}\delta_{\nu+1}+\delta_{\nu+2} = 0\end{cases}$$

die Zahlen $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{\nu+1}, \delta_{\nu+2}$. Da nun $\alpha\delta-\beta\gamma = \gamma_1\delta-\delta_1\gamma = 1$ ist, so

folgt offenbar successiv, dass die Determinanten:

$\gamma_1\delta-\delta_1\gamma,\;\; \gamma_2\delta_1-\delta_2\gamma_1,\;\; \gamma_3\delta_2-\delta_3\gamma_2,\;\; \ldots,\;\; \gamma_{\nu+1}\delta_\nu-\delta_{\nu+1}\gamma_\nu,\;\; \gamma_{\nu+2}\delta_{\nu+1}-\delta_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}$

gleich Eins sind, und da $\gamma_{\nu+2}=0$ ist, so ist $\delta_{\nu+2}=-\gamma_{\nu+1}=\mp 1$, und die Kette (32ᵃ.) bricht ebenfalls ab, wenn man noch die Gleichung:

$$\delta_{\nu+1}+\varkappa_{\nu+2}\delta_{\nu+2} = 0 \tag{32^b.}$$

hinzufügt.

Nun folgt aus der Reciprocitätsgleichung (30.), dass:

$$S\binom{\gamma_1,\ \delta_1}{\gamma,\ \delta} = e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn.}(\gamma\gamma_1)}\, S\binom{-\gamma,\ -\delta}{\gamma_1,\ \delta_1}$$

ist, und aus der dritten Gleichung (31.) ergiebt sich die weitere Reduction:

$$S\binom{\gamma_1,\ \delta_1}{\gamma,\ \delta} = e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn.}(\gamma\gamma_1)+\frac{\pi i\varkappa_1}{4}}\, S\binom{\gamma_2,\ \delta_2}{\gamma_1,\ \delta_1}.$$

Wendet man diese Gleichung $(\nu+1)$-mal an, so erhält man:

$$S\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta} = e^{\frac{\pi i}{2}(\nu+1)+\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+1}\operatorname{sgn.}(\gamma_{h-1}\gamma_h)+\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+1}\varkappa_h}\, S\binom{\gamma_{\nu+2},\ \delta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+1},\ \delta_{\nu+1}}.$$

Da aber $\gamma_{\nu+1}=\pm 1$, $\delta_{\nu+2}=\mp 1$, $\delta_{\nu+1}=\pm\varkappa_{\nu+2}$ ist, (wobei die oberen oder unteren Zeichen zusammengehören), so erhält man schliesslich:

$$S\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta} = \gamma_{\nu+1}.e^{\frac{\pi i\nu}{2}+\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+2}\operatorname{sgn.}(\gamma_{h-1}\gamma_h)+\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+2}\varkappa_h}. \tag{33.}$$

Diese Gleichung lässt sich aber noch vereinfachen, wenn man die Willkür, welche bisher bei Bildung der Kette (32.) zugelassen wurde, einschränkt. Man kann nämlich offenbar voraussetzen, dass die absoluten Beträge der Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}$ eine durchweg abnehmende Reihe bilden, und dass keine der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu+1}$ gleich Null ist. Z. B. ist dann in der ersten Gleichung (32.) $\varkappa_1$ eine der beiden ganzen Zahlen, zwischen welchen der Bruch $-\frac{\gamma}{\gamma_1}$ eingeschlossen ist, und zwar ist es die nächst grössere oder die nächst kleinere Zahl, je nachdem jener Bruch das positive oder das negative Zeichen hat. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$\operatorname{sgn.}(\gamma_{h-1}\gamma_h) = -\operatorname{sgn.}\varkappa_h$$

für $h=1, 2, \ldots, \nu+1$, und die Gleichung (33.) geht daher über in:

$$S\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta} = \gamma_{\nu+1}e^{\frac{\pi i\nu}{2}+\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+2}\varkappa_h-\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{h=1}^{h=\nu+1}\operatorname{sgn.}\varkappa_h}; \tag{33^a.}$$

hierbei erscheint das System $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ als das Compositionsresultat der Systeme:

$$\binom{0,\ 1}{-1,\ -\varkappa_1}\binom{0,\ 1}{-1,\ -\varkappa_2}\cdots\binom{0,\ 1}{-1,\ -\varkappa_{\nu+1}}\binom{0,\ \mp 1}{\pm 1,\ \pm\varkappa_{\nu+2}},$$

wobei in dem letzten Systeme die oberen oder die unteren Zeichen in Geltung sind, je nachdem $\gamma_{\nu+1} = +1$ oder $= -1$ ist. Da man ein vorgelegtes System sehr leicht in der angegebenen Weise decomponiren kann und der Werth des Symbols bei dieser Methode nur von der Beschaffenheit der *einzelnen* Systeme abhängig erscheint, so ist das angegebene Verfahren für wirkliche Berechnung sehr geeignet.

Haben wir bisher den Einfluss, den die Composition mit *elementaren* Systemen auf das Symbol ausübt, betrachtet, so können wir auch das Resultat der Composition zweier *beliebigen* Systeme der Untersuchung unterwerfen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Bemerkung aus, dass, gleichviel ob γ positiv oder negativ ist, immer

$$\left(\sqrt{\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma i}}\right) = \frac{(\sqrt{\gamma\tau+\delta})}{(\sqrt{\gamma i})}$$

ist, und setzen demgemäss mit einer Modification gegen das Frühere:

$$(34.)\qquad \vartheta_1\left(\frac{\zeta}{\gamma\tau+\delta},\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\gamma\zeta^2\pi i}{\gamma\tau+\delta}}(\sqrt{\gamma\tau+\delta})\vartheta_1(\zeta,\ \tau).S_1\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta},$$

worin das Symbol S_1 jetzt für ein von Null verschiedenes γ durch die Gleichung:

$$(35.)\qquad S_1\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta} = \frac{1}{i(\sqrt{\gamma i})}\sum_r e^{\frac{\pi i}{4\gamma}(\alpha r^2-2(\gamma-1)r+\delta)} \qquad (r=1,\ 3,\ \ldots,\ |2\gamma|-1)$$

definirt ist. Soll die Gleichung (34.) auch für $\gamma = 0$ gelten, so haben wir

$$(36.)\qquad S_1\binom{1,\ \beta}{0,\ 1} = e^{\frac{\pi i\beta}{4}},\quad S_1\binom{-1,\ \beta}{0,\ -1} = e^{\frac{\pi i}{4}(2-\beta)}$$

anzunehmen; überdies ist, wie unmittelbar aus (35.) folgt:

$$(37.)\qquad S_1\binom{0,\ -1}{+1,\ \delta} = e^{\pi i\frac{\delta-3}{4}},\quad S_1\binom{0,\ +1}{-1,\ \delta} = e^{\pi i\frac{3-\delta}{4}}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung (34.):

$$\tau = \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'},\quad \zeta = \frac{\zeta'}{\gamma'\tau'+\delta'},$$

wobei $\alpha'\delta'-\beta'\gamma' = 1$ ist, so erhalten wir diejenige lineare Transformation,

welche zu dem aus den Systemen $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}$ componirten Systeme $\begin{pmatrix}\alpha'', \beta''\\ \gamma'', \delta''\end{pmatrix}$ gehört, so dass also

$$\begin{pmatrix}\alpha'', \beta''\\ \gamma'', \delta''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}\alpha'' = \alpha\alpha'+\beta\gamma', & \beta'' = \alpha\beta'+\beta\delta'\\ \gamma'' = \gamma\alpha'+\delta\gamma', & \delta'' = \gamma\beta'+\delta\delta'\end{matrix}$$

ist. Die Durchführung der Rechnung ergiebt nun die Regel für die Composition der Symbole in der Form:

$$(38.) \qquad S_1\left(\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}\right) = \varepsilon S_1\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} S_1\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix},$$

worin das Vorzeichen ε durch die Gleichung:

$$(39.) \qquad \varepsilon = \left(\sqrt{\frac{\gamma''\tau'+\delta''}{\gamma'\tau'+\delta'}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{\gamma'\tau'+\delta'})}{(\sqrt{\gamma''\tau'+\delta''})} = \frac{(\sqrt{\gamma\tau+\delta})(\sqrt{\gamma'\tau'+\delta'})}{(\sqrt{\gamma''\tau'+\delta''})}$$

bestimmt ist. Die Gleichung (38.) enthält die allgemeinste Regel für die Transformation von Summen der Form (35.).

Sehen wir zunächst einmal von dem Vorzeichen ε in der Gleichung (39.) ab, so erhalten wir, da

$$S_1\begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad S_1\begin{pmatrix}0, -1\\ 1, 0\end{pmatrix} = -e^{\frac{\pi i}{4}}$$

ist und da, wie bekannt, jedes System der Determinante Eins in eine Folge der elementaren Systeme $\begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0, -1\\ 1, 0\end{pmatrix}$ zerlegt werden kann, unmittelbar das Resultat, dass das Symbol

$$S_1\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \pm e^{\frac{\pi i p}{4}}$$

ist, wo p die Anzahl der elementaren Systeme bedeutet, in welche das System $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ zerlegt werden kann. Daher ist der Klassenwerth der Zahl p mod. 4 unabhängig von der Art der Zerlegung, und wir erhalten beiläufig den einfachen Satz:

Zerlegt man ein quadratisches System von vier ganzen Zahlen mit der Determinante Eins auf zwei verschiedene Arten in eine Folge der elementaren Systeme $\begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix}$ ***und*** $\begin{pmatrix}0, -1\\ 1, 0\end{pmatrix}$, ***so ist die Anzahl der Systeme in beiden Fällen einander congruent modulo*** 4.

Kehren wir jetzt zur Interpretation des Vorzeichens ε in der Gleichung (39.) zurück, so gestaltet sich dieselbe dann sehr einfach, wenn wir

voraussetzen, dass keine der drei Zahlen γ, γ', γ'' verschwindet. Unter dieser Einschränkung leitet man nämlich aus (39.) leicht den Satz ab, dass ε nur dann $= -1$ ist, wenn γ und γ' einerlei Zeichens sind und γ'' das entgegengesetzte Zeichen hat. Weniger durchsichtig wird die Zeichenregel für diejenigen Fälle, in denen eine der drei ganzen Zahlen γ, γ', γ'' gleich Null ist; aber auf diese Ausnahmefälle einzugehen, ist hier um so weniger Veranlassung, weil ihre Berücksichtigung für das folgende Verfahren zur Bestimmung des Werthes von $S_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ unnöthig ist.

Nehmen wir nämlich der Einfachheit halber α als positiv an und setzen wir wie vorher $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \delta_1$, so können wir nach der gewöhnlichen Methode des Theileralgorithmus die Kette von Gleichungen bilden:

$$(40.)\quad \begin{cases} \gamma = \varkappa_1\gamma_1+\gamma_2, \quad \gamma_1 = \varkappa_2\gamma_2+\gamma_3, \quad \gamma_2 = \varkappa_3\gamma_3+\gamma_4, \quad \dots, \\ \qquad \gamma_{\nu-3} = \varkappa_{\nu-2}\gamma_{\nu-2}+\gamma_{\nu-1}, \quad \gamma_{\nu-2} = \varkappa_{\nu-1}\gamma_{\nu-1}, \end{cases}$$

in welcher $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\nu-2}, \gamma_{\nu-1} = 1$ positiv sind und eine abnehmende Reihe bilden. Setzen wir überdies, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gestattet ist, ν als *gerade* Zahl voraus, und bilden wir die correspondirende Kette von Gleichungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} \delta = \varkappa_1\delta_1+\delta_2, \quad \delta_1 = \varkappa_2\delta_2+\delta_3, \quad \delta_2 = \varkappa_3\delta_3+\delta_4, \quad \dots, \\ \qquad \delta_{\nu-3} = \varkappa_{\nu-2}\delta_{\nu-2}+\delta_{\nu-1}, \quad \delta_{\nu-2} = \varkappa_{\nu-1}\delta_{\nu-1}+\delta_\nu, \end{cases}$$

so ist successive:

$$\gamma_1\delta-\delta_1\gamma = \gamma_1\delta_2-\delta_1\gamma_2 = 1, \quad \gamma_3\delta_2-\delta_3\gamma_2 = \gamma_3\delta_4-\delta_3\gamma_4 = 1, \quad \dots,$$
$$\gamma_{\nu-1}\delta_{\nu-2}-\delta_{\nu-1}\gamma_{\nu-2} = \gamma_{\nu-1}\delta_\nu-\delta_{\nu-1}\gamma_\nu = 1,$$

und da $\gamma_\nu = 0$, $\gamma_{\nu-1} = 1$ ist, so folgt, dass $\delta_\nu = 1$ ist und die Kette (41.) durch die Gleichung:

$$(41^a.)\qquad \delta_{\nu-1} = \varkappa_\nu\delta_\nu$$

abgeschlossen wird. Da man nun nach den Gleichungen (40.) und (41.) die Decompositionen:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1, & \delta_1\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \varkappa_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma_2, & -\delta_2\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-\gamma_2, & -\delta_2\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & \varkappa_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_3, & \delta_3\\ \gamma_2, & \delta_2\end{pmatrix}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\begin{pmatrix}\gamma_{\nu-1}, & \delta_{\nu-1}\\ \gamma_{\nu-2}, & \delta_{\nu-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \varkappa_{\nu-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma_\nu, & -\delta_\nu\\ \gamma_{\nu-1}, & \delta_{\nu-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \varkappa_{\nu-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & \varkappa_\nu\end{pmatrix}$$

hat und bei successiver Anwendung der Gleichung (38.) wegen des positiven Vorzeichens der Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\nu-1}$ in keinem Falle die Vor-

bedingungen dafür erfüllt sind, dass ε den Werth -1 erhält, so ergiebt sich unmittelbar:

$$(42.)\quad S_1\begin{pmatrix}\gamma_1, & \delta_1\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = S_1\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & x_1\end{pmatrix}.S_1\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & x_2\end{pmatrix}\dots S_1\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & x_{\nu+1}\end{pmatrix}S_1\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & x_\nu\end{pmatrix}.$$

Setzt man schliesslich aus (37.) die Werthe der Symbole auf der rechten Seite der letzten Gleichung ein, so erhält man den Satz:

Wenn α positiv ist, so ist der Werth des Symbols $S_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ in der Gleichung (34.) *gleich:*

$$e^{\frac{\pi i}{4}(-x_1+x_2-x_3\dots-x_{\nu-1}+x_\nu)},$$

wobei $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ die Theilnenner in den Kettenbruch-Entwickelungen

$$\frac{\gamma}{\alpha} = x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \dots - \cfrac{1}{x_{\nu-1}}}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = x_\nu + \cfrac{1}{x_{\nu-1} + \cfrac{1}{x_{\nu-2} + \dots + \cfrac{1}{x_2}}};$$

sind; in diesen ist ν als gerade Zahl und $x_2, x_3, \dots, x_{\nu-1}$ als positiv vorausgesetzt, während x_1 und x_ν die in $\frac{\gamma}{\alpha}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ enthaltenen grössten Ganzen sind und also positiv, Null oder negativ sein können.

Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven.

(Fortsetzung von S. 264 Heft 3 Bd. 110 dieses Journals.)

(Von Herrn *Robert Schumacher* in Augsburg.)

Erzeugung der ebenen Curven mittelst der Punktsysteme.

§ 9.

Erzeugung der Curve zweiten Grades.

P und P' seien zwei Punkte, g eine Gerade in der Ebene E. Die Normalkette $n$ter Ordnung K vom n-Punktesystem S^n von g, welche P^0, den Schnitt von $\overline{PP'}$ mit g, zum Centrum hat, sei projectivisch auf die Punktreihe p' mit dem Träger g bezogen, wobei der Hauptgruppe (P^0) der Punkt P^0 entspreche. Wenn jeder Gruppe von Strahlen durch P, welche eine Gruppe von K projiciren, der Strahl durch P' zugewiesen wird, welcher den entsprechenden Punkt von p' projicirt, so ist hierdurch eine Correspondenz (n, n) zwischen den Strahlenbüscheln (P) und (P') bestimmt. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bilden eine Curve $n$ter Ordnung. Denn die Gruppen von K werden von P aus auf irgend eine Gerade l von E in den Gruppen einer Normalkette mit dem Schnitt von $\overline{PP'}$ und l als Centrum projicirt. Durch die projectivische Beziehung dieser Kette auf die Projection der Punktreihe p' von P' aus auf l ist eine Correspondenz (n, n) gegeben, welche höchstens n Coincidenzen, in den Schnittpunkten von l mit der Curve, besitzt. P und P' können nach § 8, 1 ihre Rollen vertauschen.

Satz: An die Stelle von P und P' können zwei beliebige Punkte von E treten, wofern sie nicht der Curve angehören.

Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall $n = 2$. P'' sei ein beliebiger Punkt, g' eine beliebige Gerade von E. Die Gerade $\overline{PP''}$ schneide

g in P^1, g' in $P^{1'}$; $P^{0''}$ sei der Schnitt von g' mit $\overline{P'P''}$. Das 2-Punktesystem einer Geraden l durch P' wird von P aus auf g und von P'' aus auf g' projicirt. Hierdurch ist das 2-Punktesystem S^2 von g collinear auf dasjenige Σ_2' von g' bezogen, die Projectionen derselben Gruppe von l sind einander zugewiesen. Jede Gerade l durch P' liefert so eine collineare Verwandtschaft zwischen S^2 und $S^{2'}$; hierbei sind immer die Bänder der singulären Reihen einander so zugeordnet, dass die Reihe s_{21}^0 resp. s_{21}^1 der Reihe $s_{21}^{0'}$ resp. $s_{21}^{1'}$ entspricht.

In der Beziehung von Σ_2 auf ein ebenes System ε entsprechen den Reihen s_{21}^{ξ} die Tangenten eines Kegelschnittes S, den Reihen s_{21}^0 und s_{21}^1 im Besonderen die Tangenten s^0 und s^1. Den Hauptgruppen (P^0) und (P^1) entsprechen die Punkte A und B. Der Kette K entspricht der Kegelschnitt k, welcher s_0 in A berührt. In der Beziehung von S_2' auf das ebene System ε' haben die vorigen Zeichen, gestrichen, die analoge Bedeutung.

Jedem Punkte x von k entspricht eine Gerade l durch P' und damit eine collineare Beziehung von ε auf ε'. Dem Punkte y von ε', welcher durch diese dem Punkte x zugeordnet ist, entspricht auf g' die Gruppe, in welcher die Schnittpunkte der zu x gehörigen Geraden l mit der Curve von P'' aus projicirt sind. Was für eine Reihe bilden diese Gruppen oder was für eine Curve die Punkte y? Die Gerade, welche B mit dem der Geraden $\overline{P'P''}$ entsprechenden Punkt verbindet, schneide k noch in O. Ein Punkt x von k ist als Schnitt der Geraden $\overline{Ax}$ und $\overline{Ox}$ bestimmt, der zugehörige Punkt y durch den Schnitt von $\overline{A'y}$ und $\mathfrak{g}$, welche jenen in der zu x gehörigen Verwandtschaft entsprechen. Projicirt man von P aus die Gruppen von s_{21}^1, welche den Schnitten der Geraden $\overline{Ax}$ mit s_1 entsprechen, jede auf die dem jedesmaligen Punkte x entsprechende Gerade l, so liegen die Projectionen der veränderlichen Punkte dieser Gruppen auf einer Geraden L; die Gruppe (P^0P^1) wird nämlich auf $\overline{PP'}$ projicirt. Die Projection je einer Gruppe von s_{21}^1 wiederum von P'' aus auf g' projicirt ergiebt eine Gruppe von $s_{21}^{1'}$. Entspricht erstere dem Schnitte von s_1 mit $\overline{Ax}$, so entspricht der letzteren der Schnitt von s_1' mit der zu $\overline{Ax}$ gehörigen Geraden $\overline{A'y}$. Die Schnitte der Geraden $\overline{Ax}$ mit s_1 und die Schnitte der zugehörigen Geraden $\overline{A'y}$ mit s_1' bilden daher zwei projectivische Punktreihen. Hierdurch ist der Strahlenbüschel (A) auf den Büschel (A') projectivisch bezogen. — Die Schnitte der Geraden $\overline{Ox}$ mit s_0 resp. s_1 und die Schnitte der zugehörigen

Geraden $\mathfrak{g}$ mit s'_0 resp. s'_1 sind einander ebenfalls projectivisch zugeordnet. Denn projicirt man von P aus die Gruppen s^0_{21}, welche den Schnitten der $\overline{Ox}$ mit s_0 entsprechen, je auf die zum jedesmaligen x gehörige Gerade l, so liegen die veränderlichen Punkte der Projectionen auf einer Geraden, da auf die Gerade $\overline{PP'}$ die Gruppe (P^0) projicirt wird. Wird ebenso jede Gruppe von s^1_{21}, welche dem Schnitt einer Geraden $\overline{Ox}$ mit s_1 entspricht, auf die zu x gehörige l projicirt, so liegen die veränderlichen Punkte der Projectionen auf einem Kegelschnitte, welcher, da auf die Gerade $\overline{P'P''}$ die Hauptgruppe (P^1) projicirt wird, den Punkt P'' enthält (die Gerade $\overline{OB}$ in ε enthält nach ihrer Annahme den $\overline{P'P''}$ entsprechenden Punkt).

In allen Verwandtschaften entspricht dem Schnitte von s_0 und s_1 der Schnitt von s'_0 und s'_1; daher verbinden die Geraden $\mathfrak{g}$ die entsprechenden Punkte zweier perspectivischen Punktreihen, gehen also durch einen Punkt O'. Durch die Beziehung des Büschels (O) auf den Büschel (A) mittelst der Punkte von k ist eine projectivische Beziehung zwischen (O') und (A') bestimmt. Die entsprechenden Strahlen schneiden sich in den Punkten y. Diese bilden also einen s'_0 in A' berührenden Kegelschnitt; denn dem Punkte C von k, welcher der Geraden $\overline{P'P''}$ entspricht, ist in ε' der Punkt A' zugeordnet, der Geraden $\overline{OC}$ entspricht also $\overline{O'A'}$ und der Geraden $\overline{AC}$ die Gerade s'_0; in der Beziehung von (O') auf (A') ist also $\overline{O'A'}$ dem Strahle s'_0 zugeordnet. Die Schnittpunkte je einer Geraden durch P' mit der Curve werden somit von P'' aus in den Gruppen einer hierdurch auf den Büschel (P') projectivisch bezogenen Normalkette zweiter Ordnung mit dem Centrum P''^0 projicirt.

Besonderer Fall: P'' gehöre der Curve an. Der Punkt O liegt dann auf s_1. Die Reihe s_0 wird durch die Strahlen durch O projectivisch auf den Büschel (P') bezogen, hiermit wird es auch die Reihe s^0_{21}. Die veränderlichen Punkte der Projectionen je einer Gruppe der Reihe s^0_{21} von P aus auf die zugehörige Gerade l bilden eine durch P'' gehende Gerade. Die Geraden $\mathfrak{g}$ gehen daher durch einen Punkt O' auf s'_0. Die Punkte von s'_1, welche je in einer zu einem Punkte x von k gehörigen collinearen Beziehung dem Punkte O entsprechen, bilden eine zur Punktreihe der x entsprechende Punktreihe. Der Büschel (O') ist somit auf den Büschel A' perspectivisch durch die Punkte y bezogen. Hieraus folgt: die Curve, um die es sich handelt, kann durch die projectivische Beziehung eines Strahlen-

büschels (P') auf eine Involution von Strahlen durch einen Punkt P auf ihr erzeugt werden, wenn der Geraden $\overline{P'P}$ die Gruppe, welche $\overline{PP'}$ enthält, zugeordnet ist. Man erkennt nämlich leicht, dass umgekehrt, wenn die Punkte x in s eine Gerade bilden, die Punkte y im allgemeinen auf einem s_0' in A' berührenden Kegelschnitt liegen. — Die Curve ist offenbar ein Kegelschnitt, und umgekehrt ist jeder Kegelschnitt eine derartige Curve zweiter Ordnung.

§ 10.

Erzeugung der Curve dritten Grades.

Der Satz, dass an Stelle von P jeder Punkt der Ebene treten kann, soll noch zur leichteren Verständlichkeit des Beweises für den allgemeinen Fall, bei welchem man auf die räumliche Anschauung verzichten muss, für $n = 3$ gesondert bewiesen werden.

Von P resp. P'' aus wird das Dreipunktesystem jeder Geraden $l^{(x)}$ durch P' auf g resp. g' projicirt. In jeder $l^{(x)}$ ist hierdurch eine collineare Verwandtschaft $V^{(x)}$ zwischen S^3 auf g und S'^3 auf g' bestimmt. S^3 resp. S'^3 sei durch das räumliche System $\mathfrak{R}$ resp. $\mathfrak{R}'$ versinnlicht. Den Reihen s_{32}^0 und s_{32}^1 resp. $s_{32}'^0$ und $s_{32}'^1$ entsprechen die Ebenen σ_0 und σ_1 resp. σ_0' und σ_1', den Hauptgruppen (P^0) und (P^1) bezw. (P'^0) und (P'^1) die Punkte p_0, p_1 bezw. p_0', p_1'. Den Gruppen der Kette K dritter Ordnung sind in $\mathfrak{R}$ die Punkte X einer Curve k dritter Ordnung zugeordnet. Σ und Σ' seien die Ebenenbüschel, welche in $\mathfrak{R}$ resp. $\mathfrak{R}'$ dem Bande der singulären Reihen von S^3 bezw. S'^3 entsprechen. Die Curve k hat in p_0 die Osculationsebene σ_0; der Berührungsstrahl σ_{00} in σ_0 (von Σ) ist Tangente von k. Die Punktreihe der X ist projectivisch zum Büschel der $l^{(x)}$ mit dem Centrum P'. Zu jedem Punkte X gehört daher eine Verwandtschaft $v^{(x)}$ von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Jedem Punkte X sei derjenige Punkt y von $\mathfrak{R}'$ zugeordnet, welcher ihm in $v^{(x)}$ entspricht.

Die Lage der Punkte X ist durch die Schnitte der Geraden $\overline{p_0X}$ (durch p_0) mit den Individuen ε_x einer zu k projectivischen (passend gewählten) Ebenenschaar bestimmt. Der zu X gehörige Punkt y ergiebt sich dann als Schnitt von $\overline{p_0'y}$ mit der Ebene ε_y, welche in der zu X gehörigen Verwandtschaft $v^{(x)}$ der Ebene ε_x in $\mathfrak{R}'$ entspricht.

Die Geraden $\overline{p_0X}$ schneiden σ_1 in den Punkten ξ eines Kegelschnittes, welcher die Schnittlinie σ_{01} von σ_0 und σ_1 im Schnittpunkt p_{001} von σ_{00} mit σ_{01} berührt. Der Ebene σ_1 entspricht in den Verwandtschaften $v^{(x)}$ im all-

gemeinen σ_1'. Durch die $v^{(x)}$ werden den Punkten ξ die Schnittpunkte η von σ_1' mit $\overline{p_0'y}$ zugeordnet. Nach dem vorigen Paragraphen bilden die Punkte η ebenfalls einen Kegelschnitt, denn zwischen σ_1 und σ_1' herrschen dieselben Beziehungen wie dort zwischen ε und ε'. Man erkennt, dass die Geraden $\overline{p_0'y}$ einen Kegel bilden, welcher σ_0' längs σ_{00}' berührt (σ_{ik}' hat für Σ' dieselbe Bedeutung wie σ_{ik} für Σ).

Behauptung. Die Schaar der Ebenen ε_x lässt sich so wählen, dass die zugehörigen Ebenen ε_y einen Büschel erster Ordnung bilden. — *Beweis:* Durch die Gerade σ_{11} von σ_1, welcher im Dreipunktesystem S^3 die Reihe s_{31}^{11} entspricht, und den Punkt C von k, welchem unter den Geraden $l^{(x)}$ der Strahl $\overline{P'P''}$ zugeordnet ist, sei eine Ebene ε_c gelegt; dieselbe enthält ausserhalb C eine Sehne s von k. Durch die Sehnen s und σ_{00} ist eine Regelfläche zweiten Grades bestimmt, auf welcher k liegt. Die Verbindungslinie t von p_1 mit dem Berührungspunkt von ε_c mit der Fläche schneide σ_0 in S. Die Tangentialebenen durch S an die Fläche bilden die Schaar der Ebenen ε_x. Denn für's Erste werden durch diese ε_x und durch ihre zugeordneten ε_y die Geraden σ_{00}, σ_{01} und σ_{00}' und σ_{01}' projectivisch bezw. perspectivisch auf einander bezogen (einer ε_x gehört natürlich derjenige Punkt X von k zu, welcher ausserhalb der zur Fläche gehörigen Sehne in ε_x liegt). σ_0 entspricht nämlich in den Verwandtschaften $v^{(x)}$ die Ebene σ_0'. Zwischen σ_0 und σ_0' sind durch die $v^{(x)}$ dieselben Beziehungen hergestellt wie im vorigen Paragraphen zwischen ε und ε', indem hier σ_{0i} und σ_{0i}' dieselbe Rolle spielen wie dort s_i und s_i'; an Stelle von p_{011} (Schnitt von σ_{01} mit σ_{11}) steht dort B. Da nun $\overline{Sp_{011}}$ in der Ebene ε_c enthalten ist, welche $\overline{P'P''}$ zugehört, so bilden die Schnittgeraden der Ebenen ε_y mit σ_0' im allgemeinen einen Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher zum Strahlenbüschel der Schnitte von σ_0 mit den Ebenen ε_x projectivisch ist.

Für's Zweite entspricht den Schnittpunkten von σ_{11} mit den Ebenen ε_x in den ihnen zugehörigen $v^{(x)}$ immer derselbe Punkt auf σ_{11}'. Um dies einzusehen, suchen wir zu jeder Gruppe der Reihe s_{31}^{11} die ihr hiermit zugewiesene Gruppe von $s_{31}'^{11}$. Man erhält letztere, indem man den veränderlichen Punkt der ersteren auf die zugehörige $l^{(x)}$ (der Gruppe gehört ein Punkt auf σ_{11} und damit eine Ebene ε_x und so eine $l^{(x)}$ zu) von P aus projicirt und diese Projection wiederum von P'' aus auf g'. Die Strahlen $l^{(x)}$ und die Projectionsstrahlen durch P nach den veränderlichen Punkten von s_{31}^{11} erzeugen

eine durch P'' gehende Gerade, welche im allgemeinen von $\overline{PP''}$ und $\overline{P'P''}$ verschieden ist. Denn der Ebene σ_0 als Ebene ε_x gehört $\overline{P'P}$ als Gerade des Büschels (P') und von s_{31}^{11} die Gruppe $(P^0P^1P^1)$ zu. Der Ebene ε_c gehört ferner $\overline{P'P''}$ und die Gruppe $(P^1P^1P^1)$ zu (die Tangente t durch S an obige Regelfläche geht ja durch p_1). — Die Punkte der Geraden durch P'' von P'' aus auf g' projicirt geben nur einen Punkt.

Die Ebenen ε_y gehen also sämmtlich durch einen Punkt auf σ'_{11}, der im allgemeinen nicht in σ'_0 liegen kann, und schneiden auf σ'_0 einen zu k projectivischen Strahlenbüschel erster Ordnung aus. Der Büschel der ε_y ist zum Kegel der Geraden $\overline{p'_0y}$ projectivisch und erzeugt mit ihm eine Curve höchstens von der dritten Ordnung; sie hat σ'_0 zur Osculationsebene und σ'_{00} zur Tangente. Man erkennt dies leicht analog wie im vorigen Falle, indem man bedenkt, dass dem Punkte C unter den y der Punkt p'_0 zugehört. —

Hiermit ist der an die Spitze gestellte Satz für $n = 3$ bewiesen; den Punkten y entsprechen nämlich in S'_3 die Gruppen, in welchen die Schnittpunkte je einer Geraden $l^{(x)}$ mit der Curve dritter Ordnung von P'' aus projicirt werden.

I. *Besonderer Fall:* P'' gehöre der Curve an: Da der Punkt C in σ_1 liegt, so fällt im allgemeinen S auf σ_{01}. Die Ebenen ε_y gehen daher nach § 9 „Besonderer Fall" durch einen Punkt auf σ'_{01}. Die Ebene ε_y durch p'_0 enthält daher den ihr zugehörigen Strahl σ'_{00} des Kegels mit der Spitze p'_0. Die Punkte y bilden einen Kegelschnitt, welcher σ'_{00} schneidet und in diesem Schnittpunkte σ'_0 berührt. — Aus diesem Beweise erkennt man leicht rückwärts schliessend: Ist eine Kette zweiter Ordnung, welche der Reihe R_{32} des Dreipunktesystems S^3 der Geraden g angehört und für die ihr zugehörige Gruppe $(P^0P^0P^2)$ die gemeinsame Reihe von R_{32} und s_{32}^{0} zur Ueberreihe hat, projectivisch auf den Büschel (P') bezogen, wobei der Geraden $\overline{PP'}$ die Gruppe $(P^0P^0P^2)$ entspricht, so erzeugt dieser Büschel mit den die Gruppen der Kette von P aus projicirenden Strahlen eine Curve dritter Ordnung, welche $\overline{PP^2}$ in P berührt.

II. *P' und P'' gehören der Curve an.* Die Reihe der Schnittpunkte der Geraden durch P mit g ist nach dem Vorigen durch die Curve auf eine Kette zweiter Ordnung von S^3 projectivisch bezogen. In der obigen Beziehung von S^3 auf $\mathfrak{R}$ entspreche dieser Kette der Kegelschnitt k_2 in der Ebene ε, welcher $\overline{\varepsilon\sigma_0}$, den Schnitt von ε mit σ_0, in dem Schnitte von σ_{00}

mit ε berührt. Durch die Correspondenz auf g ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen den ebenen Systemen σ_0 und ε bestimmt, in welcher den Schnitten der Ebene von Σ mit σ_0 die Punkte von k_2 zugeordnet sind. Projicirt man das ebene System auf σ_0 von p_1 aus (p_1 entspricht der Gruppe $(P^1 P^1 P^1)$, so ist auch der Bündel mit dem Centrum p_1 reciprok auf das System (ε) bezogen. In einer reciproken Verwandtschaft der räumlichen Systeme $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}''$, in welcher der Bündel (p_1) von $\mathfrak{R}$ in dieser Weise auf das System (ε) in $\mathfrak{R}''$ bezogen und der Ebene σ_0 von $\mathfrak{R}$ der Punkt p_0 von $\mathfrak{R}''$ zugeordnet ist, entspricht dem Büschel Σ als zu $\mathfrak{R}''$ gehörig eine Curve dritter Ordnung k_3, welche σ_{00} im Punkte p_0 berührt und σ_0 osculirt. Dies folgt daraus, dass der Geraden $\overline{\varepsilon\sigma_0}$ die Gerade $\overline{p_1 p_0}$ und dem Schnitt von σ_{00} mit $\overline{\varepsilon\sigma_0}$ die Ebene $\overline{p_1\sigma_{00}}$ entspricht.

Die Correspondenz auf g ist noch durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Halbkette bestimmt (§ 8, 1 Schluss). Letzterer entspricht die Projection h von k_3 auf σ_0 vom Punkte p_1 aus; denn sie entspricht in der reciproken Verwandtschaft zwischen ε und σ_0 dem Büschel der Geraden, welche die Ebenen von Σ auf ε ausschneiden. — Tritt P'' an Stelle von P, so tritt an Stelle von k_3 ein Kegelschnitt (dies erkennt man aus I., da k_3 in S_3 eine Normalkette entspricht und da durch die Beziehung von h auf den Strahlenbüschel (P') die Curve k_3 auf diesen Büschel derartig bezogen ist, dass der $\overline{P'P''}$ zugeordnete Punkt in σ_1 liegt).

Liegen also P und P' auf der Curve C_3 selbst, so ist die zur Erzeugung dienende Correspondenz auf g durch die projectivische Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette zweiter Ordnung von S^2 bestimmt, wobei dem Punkte P^0 die Reihe s_{21}^0 entspricht. Umgekehrt beweist sich leicht, dass auf diese Weise immer eine Curve dritter Ordnung von der bisher behandelten Art erzeugt wird.

§ 11.

Erzeugung der Curve $n$ten Grades.

Beweis des Satzes in § 9 für den allgemeinen Fall: Das n-Punktesystem jeder Geraden $l^{(x)}$ durch P' wird von P aus auf g, von P'' aus auf g' projicirt. Hierdurch wird zwischen S^n auf g und S'^n auf g' je eine collineare Verwandtschaft V bestimmt, in welcher die Projectionen derselben Gruppe von $l^{(x)}$ einander zugeordnet sind. Zu jeder $l^{(x)}$ gehört eine V_x. In diesen Verwandtschaften, einige specielle ausgenommen, entspricht einer

singulären Reihe $s_{n,\varrho}$ von S^n, deren Häupter aus den vielfach zu zählenden Punkten P^0 und P^1 bestehen, die Reihe $s'_{n,\varrho}$ von S'^n, deren Gruppen die Punkte P'^0 und P'^1 in derselben Vielfachheit gemein haben.

Zu jeder Gruppe X der Kette K $n$ter Ordnung gehört eine Verwandtschaft V_x. Die Gruppe Y, welche ihr in V_x entspricht, heisse ihre zugeordnete. Es ist nun zu beweisen, dass die Gruppen Y ebenfalls eine Normalkette $n$ter Ordnung mit dem Centrum P'^0 bilden.

Eine Gruppe X von K ist durch die Reihe $r_{n,1}$, welche sie mit der Hauptgruppe (P^0) vereinigt, und die Reihe $r_{n,n-1}$ — sie sei mit R_x bezeichnet — einer zu K projectivischen (passend gewählten) Schaar von Reihen $r_{n,n-1}$ bestimmt. Die zugeordnete Y findet sich als gemeinsame Gruppe der Reihe $r'_{n,1}$ mit der Hauptgruppe (P'^0) und der Reihe R_y, welche in der zu X gehörigen Verwandtschaft V_x den obigen Reihen $r_{n,1}$ und R_x entsprechen. Die Reihen $r_{n,1}$, welche die Gruppen X mit (P^0) vereinigen, bilden eine Reihenkette B von der $(n-1)$-ten Ordnung. Sie haben mit der Reihe $s^1_{n,n-1}$, wenn man von P^1 absieht, die Gruppen einer Normalkette $(n-1)$-ter Ordnung mit dem Centrum (P^0) gemein. Diese Kette ist durch B auf den Büschel der $l^{(x)}$ projectivisch bezogen, wobei der Gruppe (P^0) die Gerade $\overline{PP'}$ entspricht. Durch die Reihen von B und ihre zugeordneten $r'_{n,1}$ ist jeder Gruppe der Kette von $s^1_{n,n-1}$ eine Gruppe von $s'^1_{n,n-1}$ zugeordnet. Letztere Gruppen bilden, was aus der Gültigkeit des zu beweisenden Satzes für die ebene Curve $(n-1)$-ter Ordnung folgt, ebenfalls eine Normalkette mit dem Centrum P'^0. Die den Reihen von B zugeordneten $r'_{n,1}$ bilden daher eine Reihenkette B' (im allgemeinen) von der $(n-1)$-ten Ordnung; hierbei sind die Unterreihen von $s'^0_{n,n-1}$ die Ueberreihen von derjenigen $s'_{n,1}$, welche P'^0 als $(n-1)$-fach zu zählendes Haupt besitzt, in Bezug auf B'.

Es soll jetzt eine solche Schaar von R_x angegeben werden, dass die zugehörigen R_y einen Büschel $\beta_{n,1}$ bilden.

Bezeichnung: Die linearen Reihen $s_{n,1}$, welche den λ-fach zu zählenden Punkt P^0 und den $(n-1-\lambda)$-fachen P^1 zu Häuptern haben, seien der Kürze halber mit $S^\lambda_{n,1}$ bezeichnet; in den Verwandtschaften V_x entsprechen ihnen $S'^\lambda_{n,1}$.

Die Schaar der R_x sei derart, dass durch sie die Reihen $S^\lambda_{n,1}$ projectivisch auf K bezogen werden. Diejenigen von ihnen, welche s^{11}_{31} als Grundreihe besitzen, seien dann projectivisch zu einander, die zwei übrigen, auf welche die Grundreihen s^{01}_{31} und s^{10}_{31} vertheilt seien, perspectivisch. Dies

gilt dann auch für die Grundreihen. Den Gruppen $(P^1P^1P^1)$ von s_{31}^{11} und $(P^1P^1P^0)$ von s_{31}^{01} sei hierbei die zu $\overline{P'P''}$ gehörige Gruppe Γ von K und der Gruppe $(P^1P^1P^0)$ von s_{31}^{11} die Hauptgruppe (P^0) von K zugeordnet. Aus dem Beweise des vorigen Paragraphen für den Fall $n = 3$ folgt dann, dass die Reihen R_y die Reihen $S_{n,1}'^{\lambda}$, welche s_{31}^{11} nicht als Grundreihe besitzen, projectivisch auf die analogen von S^3 und perspectivisch auf einander beziehen. Mit den übrigen $S_{n,1}'^{\lambda}$ haben alle R_y je dieselbe Gruppe gemein. Enthält letztere einen von P'^0 und P'^1 verschiedenen Punkt, so erkennt man leicht successive, dass durch diese Gruppen eine Reihe $r_{n,n-3}$ und damit ein Büschel $\beta_{n,1}$ bestimmt ist, welcher von den R_y gebildet wird. Die Schaar der R_x wäre folglich von der gesuchten Beschaffenheit.

Die soeben entwickelten Beziehungen zu den Reihen $S_{n,1}^2$ würde ein Band B^{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung von Reihen $r_{n,n-1}$ haben, dem folgende Eigenschaften zukommen: Die Reihen $r_{n,n-1}$ enthalten eine gemeinschaftliche Gruppe Ω mit P^0 als $(n-2)$-fachen Punkte. B^{n-1} ist zu K perspectivisch (d. h. jede Reihe enthält ihre entsprechende Gruppe). Die Reihe R_γ, welche Γ (die $P'P''$ zugehörige Gruppe) mit $s_{n,n-2}^{11}$ vereinigt, gehöre B^{n-1} an und entspreche Γ. Die Reihen $R_{\gamma i}$, welche Ω mit den Unterreihen von $s_{n,n-1}^1$ vereinigen, seien die Unterreihen von R_γ in Bezug auf B^{n-1}.

Erzeugung von B^{n-1}. Die Reihe R_γ enthält eine Reihe $R_{n,n-2}$, welcher Γ nicht angehört, von der Art, dass sie den Reihen $r_{n,n-1}$ eines zu K perspectivischen Büschels $B_{n,1}$ gemeinsam ist. K ist nämlich durch die collineare Zuordnung zweier Bündel $\beta_{n,n-1}$, deren Reihen die Gruppe Γ bezw. (P^0) gemein haben, bestimmt; $R_{n,n-2}$ ist hierbei die gemeinsame Reihe von R_γ und ihrer zugeordneten § 7, 6. Vereinigt man $S_{n,1}^{n-1}$ mit den Gruppen X von K durch Reihen $r_{n,2}$, so haben diese mit $R_{n,n-2}$ die Gruppen einer zu K projectivischen Kette k_{n-2} von der $(n-2)$-ten Ordnung gemein (dies ist im allgemeinen Falle so, da R_γ nur in besonderen Fällen*) $S_{n,1}^{n-1}$ enthält). Durch $B_{n,1}$ ist $S_{n,1}^{n-1}$ projectivisch auf K und damit auf k_{n-2} bezogen. Entsprechende Gruppen dieser drei Reihen gehören derselben $r_{n,1}$ an. — Die Reihen $r_{n,n-1}$ von B^{n-1} sind nun durch die projectivische Beziehung von $S_{n,1}^{n-1}$ auf ein zu k_{n-2} perspectivisches Band B^{n-2} von folgender Beschaffen-

*) Die besonderen Fälle hängen von der Specialisirung der Lage von P'' ab. Der zu beweisende Satz hat es aber nur mit der allgemeinen Lage von P'' zu thun. Die Gruppe Γ hat also zu $s_{n,n-1}^1$ die allgemeinste Lage.

heit bestimmt. B^{n-2} ist von der $(n-2)$-ten Ordnung; seine Reihen $r_{n,n-2}$ sind in R_γ enthalten und haben die Gruppe Ω gemein. Die Reihe $R_{\gamma 1}$, welche die der Gruppe Γ zugeordnete Gruppe Γ_1 von k_{n-2} mit $s^{111}_{n,n-3}$ vereinigt, gehöre B^{n-2} an und entspreche Γ. Ebenso gehöre zu $R_{n,n-2}$ die gemeinsame Reihe R^0 von R_γ und $s^0_{n,n-1}$. Die Reihen $R_{\gamma i}$ seien die Unterreihen von $R_{\gamma 1}$ in Bezug auf B^{n-2}. — Ω ist als gemeinsame Gruppe (im allgemeinen Falle) von $R_{\gamma 1}$ und der zweidimensionalen Unterreihe von $s^0_{n,n-1}$ bestimmt.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Frage nach dem Bande B^{n-2} auf die Frage nach einem analogen Bande B^{n-3} in $R_{\gamma 1}$ führt. — $R_{\gamma 1}$ enthält eine Reihe $r_{n,n-4}$ von $R_{n,n-2}$, welche Γ_1 nicht enthaltend den Reihen $r_{n,n-3}$ eines zu k_{n-2} perspectivischen Büschels erster Ordnung gemeinsam ist. In $R_{\gamma 1}$ sei eine beliebige Reihe $R_{n,n-3}$, welcher jene $r_{n,n-4}$ angehört, genommen. Der Büschel der Reihen $r_{n,n-2}$, welche R_γ angehören und $R_{n,n-3}$ gemeinsam enthalten, ist zu k_{n-2} perspectivisch; $R_{\gamma 1}$ entspricht Γ_1. Die Reihe $R_{\gamma 2}$ vereinigt Ω mit $s^{1111}_{n,n-4}$. Die gemeinsame Reihe von $R_{\gamma 1}$ und $s^0_{n,n-1}$ sei R^0_1. Die Reihen $R_{\gamma 2}$ und R^0_1 (beides Reihen von $R_{\gamma 1}$) haben mit $R_{n,n-3}$ je eine Reihe $r_{n,n-4}$ gemein; die erste davon werde mit Γ_1 und die zweite mit der Gruppe A_1 von k_{n-2}, welche der Hauptgruppe (P^0) von K entspricht, vereinigt. Man nehme nun irgend eine der mehrfach unendlich vielen (im Falle $n = 4$ einfach unendlich vielen) Reihen $r_{n,1}$, etwa $R_{n,1}$, welche mit jener $r_{n,n-3}$ und mit k_{n-2} je eine Gruppe gemein haben. $R_{n,1}$ befinde sich ganz ausserhalb $R_{n,n-3}$. Wird $R_{n,1}$ mit den Gruppen von k_{n-2} durch Reihen $r_{n,2}$ vereinigt, so bestimmen diese in $R_{n,n-3}$ die Gruppen einer Kette k_{n-3} von der $(n-3)$-ten Ordnung. Aus der Annahme von $R_{n,1}$ folgt, dass in der projectivischen Beziehung von k_{n-3} zu k_{n-2} die Γ_1 bezw. A_1 entsprechenden Gruppen Γ_2 bezw. A_2 in $R_{\gamma 2}$ bezw. R^0_1 enthalten sind. $R_{n,n-3}$ ist ferner seiner Annahme nach den Reihen $r_{n,n-2}$ eines zu k_{n-2} perspectivischen Büschels erster Ordnung gemeinsam. Letzteres bezieht $R_{n,1}$ perspectivisch auf k_{n-2}. Man erkennt, dass einander zugeordnete Gruppen von $R_{n,1}$, k_{n-2} und k_{n-3} derselben Reihe $r_{n,1}$ angehören. Hieraus folgt: B^{n-2} ist durch die projectivische Beziehung von $R_{n,1}$ auf ein zu k_{n-3} perspectivisches Band B^{n-3} $(n-3)$-ter Ordnung innerhalb von $R_{\gamma 1}$ von Reihen $r_{n,n-3}$ mit der gemeinsamen Gruppe Ω bestimmt. B^{n-3} muss $R_{\gamma 2}$ und R^0_1 als den Gruppen Γ_2 und A_2 entsprechend enthalten. Die übrigen Reihen $R_{\gamma i}$ müssen Unterreihen von $R_{\gamma i}$ in Bezug auf B^{n-3} sein.

B^{n-3} in $R_{\gamma 2}$ führt analog auf ein Band B^{n-4} in $R_{\gamma 3}$ u. s. f. (Die

Reihen von B^{n-3} haben nämlich mit der zu B^{n-3} gehörigen Reihe $R_{\gamma 2}$ die Reihen eines Bandes $(n-4)$-ter Ordnung gemein. Geht man so weiter, so kommt man zum Schluss auf ein Band B^1, das aus einem Büschel erster Ordnung von Reihen $r_{n,1}$ in $R_{\gamma,n-3}$ besteht. $R_{\gamma,n-3}$ ist die $S^0_{n,1}$ mit Ω vereinigende Reihe, ist also von der zweiten Dimension. Von der Kette k_{n-2} gelangt man successive zur Kette k_1 d. h. einer Reihe $r_{n,1}$ in $R_{\gamma,n-3}$. $R_{\gamma,n-4}$ vereinigt Ω mit (P^1). Die $R_{\gamma,n-3}$ und $s^0_{n,n-1}$ gemeinsame Reihe vereinigt Ω mit der P^0 enthaltenden Gruppe von $S^0_{n,1}$. $R_{\gamma,n-4}$ und die eben angeführte Reihe enthalten die Gruppen von k_1, welche Γ_1 und A_1 von k_{n-2} entsprechen. B^1 ist der zu k_1 perspectivische Büschel erster Ordnung mit der Grundgruppe Ω. B^1 genügt den ihm durch die Analogie gestellten Bedingungen. Hiermit ist für eine allgemeine Lage von Γ das Vorhandensein eines Bandes B^{n-1} von den verlangten Eigenschaften bewiesen.

Die Reihen R_y, welche den Reihen R_x von B^{n-1} zugehören, haben also mit jeder $S'^{\lambda}_{n,1}$, wenn $\lambda < n-2$, dieselbe Gruppe gemein, und beziehen die übrigen dieser Reihen, $S'^{n-2}_{n,1}$ und $S'^{n-1}_{n,1}$ perspectivisch auf einander. Gehört keine jener Gruppen zugleich $S'^{\lambda}_{n,1}$ und $S'^{\lambda+1}_{n,1}$ an*), was nur bei specieller Lage von Γ eintrifft, so bestimmen sie eine Reihe $r_{n,n-3}$ (man erkennt dies, wenn man diese Reihe successive entstehen lässt). Die Reihen R_y bilden daher einen Büschel $B'_{n,1}$ erster Ordnung.

$B'_{n,1}$ ist projectivisch zur Reihenkette B'. Der Reihe R_y, welche (P'^0) enthält, ist hierbei $S'^{n-1}_{n,1}$ zugeordnet. Die Gruppen, welche entsprechenden Elementen von B' und $B'_{n,1}$ gemeinsam sind, bilden eine Kette K' $n$ter Ordnung mit $S'^{n-1}_{n,1}$ als erster Ueberreihe für (P'^0). — Um dies einzusehen, sei der Bündel $B'_{n,n-1}$ der Reihen, welche (P'^0) gemein haben, derartig reciprok auf $s^0_{n,n-1}$ bezogen, dass der Kette B' das Band der Reihen $s^{0\xi}_{n,n-2}$ zugeordnet wird, wobei der Reihe $S'^{n-1}_{n,1}$ die Reihe $s^{00}_{n,n-2}$ entspricht. Der gemeinsamen Reihe $r'_{n,n-1}$ von B' und $B'_{n,n-1}$ entspricht eine Gruppe von $s^0_{n,n-1}$, welche der in $s^0_{n,n-1}$ nicht enthaltenen Axreihe α des Bandes der Reihen $s^{\xi}_{n,n-1}$ angehört. α ist durch dieses Band projectivisch auf das Band der Reihen $s^{0\xi}_{n,n-2}$ und damit auf B' bezogen. Ordnet man noch zwei Gruppen von α

*) Tritt dieser Fall ein, so erkennt man aus der Betrachtung der zur Erzeugung der Curve dienenden Strahlenbüschel (P) und (P'), dass die Reihen R_x ausser Ω noch andere Gruppen gemein haben müssen. B^{n-1} geht in ein Band niederer Ordnung über. Mittelst dieses Bandes und einer projectivischen Reihe $r_{n,1}$ lassen sich aber dann unendlich viele Bänder $(n-1)$-ter Ordnung von der verlangten Beschaffenheit erzeugen.

den ihnen durch Vermittlung von B' zugewiesenen Reihen von $B'_{n,1}$ (durch die obige Beziehung zwischen $B'_{n,1}$ und B) zu, so ist eine reciproke Verwandtschaft zwischen S'^n und S^n bestimmt, in welcher den Reihen $s^{\xi}_{n,n-1}$ die Gruppen von K entsprechen. K' ist eine Normalkette mit dem Centrum P''' — K' hat nämlich die Reihe $S'^{n-1}_{n,1}$ (die $(n-2)$-te Unterreihe von $s'''_{n,n-1}$) zur ersten Ueberreihe für (P'''). Ihre übrigen Ueberreihen für (P''') sind zugleich die Ueberreihen von $S'^{n-1}_{n,1}$ in Bezug auf B' und damit Unterreihen von $s'''_{n,n-1}$. — Die Gruppen, in welchen die Schnittpunkte je einer Geraden durch P' mit der Curve $n$ten Grades von P'' aus auf g' projicirt werden, bilden also eine Normalkette $n$ter Ordnung. Jeder Geraden von P' ist hierbei eine Gruppe von K' zugeordnet. P''' entspricht $P'P''$.

I. ***Besonderer Fall:*** P'' gehört der Curve $n$ten Grades an. Die Gruppe Γ ist in $s^1_{n,n-1}$ enthalten, und damit fällt im allgemeinen die Reihe R_γ mit $s^1_{n,n-1}$ zusammen. Ω gehört daher $S^{n-2}_{n,1}$ an. Aus § 9 „besonderer Fall" erkennt man mittelst Betrachtung der Grundreihen $s^{(1)}_{21}$ und $s^{(\lambda)}_{21}$ von $S^{n-2}_{n,1}$ und $S^{n-1}_{n,1}$, dass die Reihen $R_{\prime\prime}$ von $B'_{n,1}$ eine Gruppe von $S'^{n-1}_{n,1}$ gemeinsam enthalten. — Durch die projectivische Beziehung von $B'_{n,1}$ auf B' ist der Reihe $r'_{n,n-1}$ mit der Gruppe (P''') die in ihr enthaltene Reihe $S'^{n-1}_{n,1}$ zugeordnet; die Kette K' ist daher von der $(n-1)$-ten Ordnung.

Beweis: $B'_{n,n-1}$ sei wie oben auf die Reihe $s_{n,n-1}$ bezogen. Die Reihen $r_{n,n-1}$, welche die Reihen $s''^{\xi}_{n,n-2}$ mit einer Gruppe vereinigen, bilden eine Reihenkette k von der $(n-1)$-ten Ordnung. Die Reihe $R_{n,1}$, welche die der gemeinsamen Reihe von $B'_{n,1}$ und $B'_{n,n-1}$ entsprechende Gruppe von $s''_{n,n-1}$ enthält, sei von der Beschaffenheit, dass die Reihe ihrer mit den Reihen von k gemeinsamen Gruppen zur Reihenkette k projectivisch ist (es giebt solcher Reihen $r_{n,1}$ einfach unendlich viele, sie sind in einer Reihe $r_{n,2}$ enthalten). $R_{n,1}$ ist durch k projectivisch auf das Band der $s''^{\xi}_{n,n-2}$ und damit auf B' und mittelst B' auf den Büschel $B'_{n,1}$ bezogen. Ordnen wir noch zwei Gruppen von $R_{n,1}$ den entsprechenden Reihen von B' zu, so ist hiermit eine reciproke Verwandtschaft zwischen S'^n und S^n bestimmt, in welcher der Reihenkette k die Kette K' entspricht.

Durch die Beziehung von $B'_{n,1}$ auf B' ist $B'_{n,1}$ auf die Kette der Reihen $r'_{n,1}$, welche die Reihe $S'^{n-1}_{n,1}$ mit den anderen Reihen von B' vereinigen, projectivisch bezogen, wobei der Reihe von $B'_{n,1}$ mit der Gruppe (P''') die $(n-3)$-te Unterreihe von $s'''_{n,n-1}$ zugeordnet ist. Hieraus folgt, dass K' für die Gruppe, welche sie von $S'^{n-1}_{n,1}$ enthält, die Reihen $r'_{n,n-2}$, welche $s'''_{n,n-1}$ und

ihre Unterreihen mit der K' enthaltenden $r_{n,n-1}$ gemein haben, zu Ueberreihen hat. — Kehren wir das Beweisverfahren um, so ergiebt sich:

„Eine Kette K $(n-1)$-ter Ordnung vom n-Punktesystem der Geraden g enthalte von der $(n-2)$-ten Unterreihe von $s''_{n,n-1}$ eine Gruppe $[(P'')P^2]$ und habe zu Ueberreihen für diese Gruppe die gemeinsamen Reihen $r_{n,n-2}$ von $s''_{n,n-1}$ und ihren Unterreihen mit der K enthaltenden Reihe $R_{n,n-1}$. Die Strahlen durch P, welche die Gruppen von K projiciren, erzeugen mit den Strahlen des zu K projectivischen Büschels (P') (wobei der Gruppe $[(P'')P^2]$ die Gerade $\overline{P'P}$ entspreche) eine Curve $n$ter Ordnung, welche $\overline{PP^2}$ in P berührt."

Fällt die Reihe $R_{n,n-1}$ mit einer Reihe $s^{\alpha}_{n,n-1}$ zusammen, so zerfällt die Curve in eine Curve $(n-1)$-ten Grades und eine Gerade durch P. Hieraus folgt leicht: Verbindet man die entsprechenden Elemente einer Normalkette $(n-1)$-ter Ordnung (vom $(n-1)$-Punktsystem) und einer dazu projectivischen Punktreihe derselben Geraden, wobei das Centrum sich selbst zugeordnet sei, zu Gruppen, so erhält man eine Normalkette $n$ter Ordnung mit demselben Centrum.

II. *P' und P'' liegen auf der Curve $n$ten Grades C_n.* Durch die Curve sind den Geraden durch P die Gruppen einer Kette K_{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung von S^n zugeordnet, welche in der Reihe $R_{n,n-1}$ enthalten seien, den Geraden durch P' die Gruppen einer Halbkette H (§ 8, 1). Zwischen $R_{n,n-1}$ und $s''_{n,n-1}$ ist eine reciproke Verwandtschaft bestimmt, in welcher der Kette K_{n-1} das Band der $s''^{\xi}_{n,n-2}$ entspricht. Der Bündel B der Reihen, welche die Hauptgruppe (P'') enthalten, sei derartig auf die Reihe $R_{n,n-1}$ reciprok bezogen, dass jeder Reihe $r_{n,k}$ der letzteren diejenige Reihe von B zugeordnet ist, welche die der $r_{n,k}$ entsprechende Reihe von $s''_{n,n-1}$ enthält. In einer reciproken Verwandtschaft der in einander liegenden Punktsysteme S^n und S''^n auf g, durch welche der Bündel B von S^n in jener Weise auf $R_{n,n-1}$ als Reihe von S''^n bezogen und der Reihe $s''_{n,n-1}$ von S^n die Hauptgruppe (P'') zugeordnet ist, entspricht dem Band der Reihen $s^{\xi}_{n,n-1}$ von S''^n die Kette K_n $n$ter Ordnung. K_n ist eine Normalkette mit dem Centrum P''. Denn K_{n-1} hat nach I. die gemeinsamen Reihen von $R_{n,n-1}$ mit $s''_{n,n-1}$ und ihren Unterreihen zu Ueberreihen für die in $R_{n,n-1}$ und der linearen Unterreihe von $s''_{n,n-1}$ enthaltene Gruppe. Einer Reihe von S''^n, welche diese Gruppe oder eine ihrer Ueberreihen mit (P'') vereinigt, entspricht aber die gemeinsame Reihe von $s''_{n,n-1}$ mit einer Reihe von B, welche eine Unterreihe von $s''_{n,n-1}$ bezw. die Hauptgruppe (P'') enthält. Die Kette B der Reihen $r_{n,1}$, welche

die Gruppen von K_n mit (P^1) vereinigen, bestimmt mit $s^0_{n,n-1}$ die Gruppen einer Kette, welche sich auf die Halbkette H gründet. Denn diesen Gruppen sind in der reciproken Verwandtschaft von $R_{n,n-1}$ und $s^0_{n,n-1}$ die Reihen, welche $R_{n,n-1}$ mit den Reihen $s^\xi_{n,n-1}$ gemein haben, zugeordnet. — Die Reihenkette B ist auf den Büschel (P') projectivisch bezogen, wenn jeder Geraden durch P' die Reihe $r_{n,1}$ von B zugeordnet wird, welche die der Geraden entsprechende Gruppe von H enthält. Projicirt man die Gruppen jeder $r_{n,1}$ von B auf ihre zugeordnete Gerade von P aus, so bilden hierbei die Projectionen der Gruppen von K_n eine Curve C'_n $n$ten Grades, welche durch die Schnittpunkte von $\overline{PP''}$ mit C_n geht (die Reihen von B, welche der Reihe $s^1_{n,n-1}$ angehörige Gruppen von H enthalten, gehören nämlich $s^1_{n,n-1}$ an). Projicirt man die Projectionen der $r_{n,1}$ von B wiederum von P'' aus auf g', so erhält man die Reihen $r'_{n,1}$ einer Kette B' von der $(n-1)$-ten Ordnung; die $r'_{n,1}$ enthalten die Hauptgruppe (P''^1). Die Schnitte der Geraden von (P') mit C'_n werden nämlich von P'' aus (nach I.) auf g' in den Gruppen einer Kette $(n-1)$-ter Ordnung projicirt; dieselbe sei in der Reihe $R'_{n,n-1}$ enthalten. Die Reihen von B' haben dann mit $s''^0_{n,n-1}$ die Gruppen einer Kette K'_{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung gemein; in sie fallen die Projectionen der Schnittpunkte der Geraden durch P' mit der Curve C_n von P'' aus. K'_{n-1} hat die gemeinsamen Reihen von $R'_{n,n-1}$ mit $s^0_{n,n-1}$ und ihren Unterreihen zu Ueberreihen.

„Eine Curve $n$ten Grades stellt zwischen den Geraden durch zwei ihrer Punkte P' und P'' eine Correspondenz $(n-1,\ n-1)$ her. Die hierdurch auf irgend einer Geraden g' bestimmte Correspondenz beruht auf der projectivischen Beziehung einer Punktreihe auf eine Kette K' $(n-1)$-ter Ordnung vom $(n-1)$-Punktesystem, wobei dem Schnitt von g' mit $\overline{P'P''}$ eine ihn enthaltende Gruppe zugeordnet ist. K' hat für diese Gruppe die Reihen, welche eine Reihe $R'_{n-1,n-2}$ mit $s''^0_{n-1,n-2}$ und ihren Unterreihen gemein hat, zu Ueberreihen. — Umgekehrt wird durch eine derartige Correspondenz $(n-1,\ n-1)$ zwischen den Büscheln (P') und (P'') eine durch diese Punkte gehende Curve $n$ter Ordnung erzeugt.“

Zum Beweise des letzten Theiles des Satzes fügt man den Gruppen von K' je den Punkt (P''^0) zu und vereinigt die neuen Gruppen mit der Hauptgruppe (P''^1) durch Reihen $r'_{n,1}$. Diese haben mit der Reihe $R'_{n,n-1}$, welche von $s''^0_{n,n-1}$ die sich auf $R'_{n-1,n-2}$ gründende Reihe enthält, die Gruppen einer Kette $(n-1)$-ter Ordnung gemein. So kommen wir wieder auf die Curve C'_n. Indem wir auf diese Weise in dem vorigen Beweise rückwärts schreiten

und indem wir schliesslich P mit P' vertauschen, kommen wir auf eine Erzeugung der Curve, um die es sich handelt, nach Art des besonderen Falles I.

§ 12.

Büschel von Curven.

1. C_n^0 und C_n^1 seien zwei Curven $n$ten Grades in der Ebene E. Dieselben werden mittelst der Geraden durch die Punkte P und P' erzeugt, indem der Büschel (P') projectivisch auf die Normalkette K^0 resp. K^1 auf der Geraden g bezogen ist. K^0 und K^1 haben P^0, den Schnitt von g mit $\overline{PP'}$, zum Centrum. Die Ketten sind zu einander projectivisch. Die entsprechenden Gruppen derselben seien durch lineare Reihen $r_{n,1}$ — wir bezeichnen sie mit ϱ — vereinigt. In den projectivischen Beziehungen der ϱ auf einander, in welchen die Gruppen von K^0, von K^1 und von $s_{n,n-1}^0$ je einander zugeordnet sind, bilden die einander entsprechenden Gruppen je eine Normalkette $n$ten Grades mit dem Centrum P^0 (dem Haupte von $s_{n,n-1}^0$).

Beweis: Wir fassen K^0 und K^1 sowie die Reihen ϱ als zum $(n+1)$-Punktesystem gehörig auf, indem wir jeder ihrer Gruppen den Punkt P^0 zufügen. Die Reihen $r_{n+1,1}$, welche die Gruppen von K^1 mit einer Gruppe Γ von S^{n+1} vereinigen, haben mit einer Reihe $R_{n+1,n}^1$ die Gruppen einer Kette k^1 gemein. k^1 ist projectivisch zu K^0. Hierdurch ist eine collineare Verwandtschaft zwischen $R_{n+1,n}^1$ und $s_{n+1,n}^0$ hergestellt. Die Verwandtschaft (§ 7, 2) bestimmt ein Band B $n$ter Ordnung von Reihen $r_{n+1,n}$, welchem offenbar die Reihe $R_{n+1,n}^0$, welche Γ und $s_{n+1,n-1}^{(n)}$ enthält, angehört. Die Axreihen α des Bandes, welche entsprechende Gruppen von k^1 und K^0 vereinigen, sind durch die Reihen $r_{n+1,1}$ mit Γ projectivisch (bezw. perspectivisch) auf die Reihen ϱ bezogen, so dass den Gruppen der Reihen $s_{n+1,n}^0$, $R_{n+1,n}^1$ und $R_{n+1,n}^0$ die Gruppen von K^0, K^1 und $s_{n+1,n-1}^{(n)}$ zugeordnet sind. Hiermit sind diese Axreihen selbst zu einander projectivisch und zwar in derselben Weise, wie sie es vermittelst der Reihen des Bandes B sind. Den einander entsprechenden Gruppen der ϱ sind daher je die in einer Reihe R^ξ von B enthaltenen Gruppen jener Axreihen zugeordnet; diese bilden aber, da R^ξ durch die Axreihen collinear auf $s_{n+1,n}^0$ bezogen ist, eine Kette k^ξ $n$ter Ordnung. Die Reihen $r_{n+1,1}$, welche sie mit Γ vereinigen, bestimmen in $s_{n+1,n}^0$ eine Normalkette K^ξ: eine Normalkette, da jeder Unterreihe von $s_{n+1,n}^0$ die Reihe von R^ξ entspricht, welche mit ihr und mit Γ einer Reihe der nächst höheren Stufe angehört.

Jede Reihe K^{ξ} ist durch die Reihen ϱ projectivisch auf K^0 und damit auf den Büschel (P') bezogen. Hiermit sind einfach unendlich viele Correspondenzen (n, n) zwischen den Büscheln (P') und (P) bestimmt. Diese geben einen „Büschel“ von einfach unendlich vielen Curven C_n^{ξ}, welche jede Gerade l durch P' in den Gruppen einer Reihe $r_{n,1}$ schneiden; diese Gruppen bilden die Projectionen der Gruppen einer Reihe ϱ von P aus. Offenbar sind diese Reihen $r_{n,1}$ durch die Ketten projectivisch auf einander bezogen.

Besonderer Fall: Haben die Ketten K^0 und K^1 eine Gruppe gemein, welche sich selbst zugeordnet ist (d. h. schneiden die Curven C_n^0 und C_n^1 auf einer Geraden durch P' dieselbe Gruppe aus*)) so ist die Reihe $r_{n+1,1}$, welche diese Gruppe mit I' vereinigt, eine Axreihe von B. Die Gruppe gehört daher jeder der Ketten K^{ξ} an. Ausserdem erkennt man, dass die Reihe $R_{n+1,n}^0$ von B eine Normalkette $(n-1)$-ter Ordnung giebt. — Die Curven des Büschels schneiden also in diesem Falle auf einer Geraden durch P' dieselbe Gruppe aus; dem Büschel gehört eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung an.

2. Die Curven C_n^{ξ} eines Büschels gehen sämmtlich durch die Schnitte zweier derselben.

Sei P'' ein Schnittpunkt von C_n^0 und C_n^1 und schneide $\overline{P''P}$ die Gerade g in P', dem Haupte von $s_{n,n-1}^1$, so enthält $s_{n,n-1}^1$ die der Geraden $\overline{P'P''}$ zugeordnete Reihe ϱ. Alle Gruppen der letzteren enthalten somit den Punkt P'. Die Gruppen der durch den Büschel der Curven auf $\overline{P'P''}$ bestimmten Reihe $r_{n,1}$ enthalten also den Punkt P''.

3. Durch jeden Punkt der Ebene E geht im allgemeinen eine Curve des Büschels.

M sei ein beliebiger Punkt der Ebene, $\overline{MP}$ schneide g im Punkte P^a. Die Gruppen der Reihen ϱ, welche der gemeinschaftlichen Gruppe von $s_{n,n-1}^a$ und der zu $\overline{P'M}$ gehörigen ϱ zugeordnet sind, bilden die Kette K, welche die Curve durch M begründet; diese ist also im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Im besonderen Falle von 1. wird für einen Punkt der Geraden L, auf welcher die Curven C_n^{ξ} dieselbe Gruppe ausschneiden, die zu $\overline{P'M}$ gehörige ϱ unbestimmt. L ist ein Theil einer C_n^{ξ}. Umgekehrt bestimmt eine

*) Kurzer Ausdruck für: bestimmen eine durch einen Bündel $\beta_{n,1}$ charakterisirte Gruppe.

Curve $n$ten Grades mit L und einer Curve $(n-1)$-ten Grades einen Büschel, dessen Curven auf L dieselbe Gruppe ausschneiden. Zum Beweise nimmt man in der Reihe $R^{0}_{n+1,n}$ (s. 1) eine Γ enthaltende Kette $n$ter Ordnung an, deren Gruppen mit Γ und je einer Gruppe der die Curve $(n-1)$-ter Ordnung begründenden Kette einer Reihe $r_{n+1,1}$ angehören.

4. Die Curven C^{ξ}_{n} eines Büschels schneiden auf jeder Geraden die Gruppen einer Reihe $r_{n,1}$ aus.

Beweis: Der Satz ist nur für die Geraden durch P zu beweisen, da an Stelle von P jeder Punkt treten kann. Die Correspondenzen (n, n) auf g, welche die Curven C^{ξ}_{n} begründen, beruhen auf der reciproken Verwandtschaft eines n-Punktesystems S^{n} zu einfach unendlich vielen n-Punktesystemen $S^{\xi n}$ (S^{0n} entspreche der Curve C^{0}_{n}), welche in einander liegen. Die Systeme $S^{\xi n}$ sind collinear zu S^{0n}. Jede Reihe R^{ξ} des Bandes B (s. 1.) vom $(n+1)$-Punktesystem auf g ist durch die Axreihen von B auf $s^{0}_{n+1,n}$ und damit auf S^{0n} collinear bezogen. Zu jeder R^{ξ} gehört, wie aus dem Beweise von 1. hervorgeht, ein System $S^{\xi n}$ derart, dass die Gruppen von R^{ξ} und $S^{\xi n}$ (diese mit dem Punkte P^{0} verbunden), welche je derselben Gruppe von S^{0n} zugeordnet sind, mit der Gruppe Γ (s. 1.) je derselben Reihe $r_{n+1,1}$ angehören. Betrachtet man eine Reihe $r_{n,n-1}$, etwa R, nach einander als Reihe je eines der Systeme $S^{\xi n}$, so entsprechen ihr nach einander die Gruppen einer Reihe $r_{n,1}$. Denn die Reihe $\mathfrak{R}_{n+1,n}$, welche die Reihe R (als Reihe von $s^{0}_{n+1,n}$) mit Γ vereinigt, hat mit den Reihen R^{ξ} Reihen $r_{n+1,n-1}$ gemein, welchen von $s^{0}_{n+1,n}$ die Reihen eines Büschels B erster Ordnung zugeordnet sind. Jede Gruppe, welche R mit einer der letzteren gemein hat, gehört nämlich einer in $\mathfrak{R}_{n+1,n}$ enthaltenen Axreihe an und ist somit allen diesen gemeinsam (in jeder R^{ξ} entspricht ihr eine Gruppe von $\mathfrak{R}_{n+1,n}$). Jeder Reihe von B ist hierbei eine Reihe $r_{n+1,n-1}$ zugeordnet. Eine nicht zu $s^{0}_{n+1,n}$ gehörige Axreihe von B, welche mit jener Reihe eine Gruppe gemein hat, enthält nämlich von $\mathfrak{R}_{n+1,n}$ eine Gruppe, welche nur einer die Axreihe nicht enthaltenden Reihe von B angehört. Letztere enthält die betreffende $r_{n+1,n-1}$. Der Büschel B gründet sich auf einen Büschel $\beta_{n,1}$; diesem entspricht in der Verwandtschaft zwischen S^{0n} und S^{n} die Reihe $r_{n,1}$ von S^{n}, welche die nach einander der Reihe R zugeordneten Gruppen enthält. Hieraus folgt, wenn man an Stelle von R eine der singulären Reihen $s^{\xi}_{n,n-1}$ setzt: die Gruppen, welche durch die Curven des Büschels nach einander dem Schnittpunkte einer Geraden durch P mit g zugeordnet werden, gehören einer Reihe $r_{n,1}$

an; hiermit ist der Satz bewiesen. — Jeder Curve gehört eine Gruppe jeder dieser $r_{n,1}$ an, und umgekehrt gehört jede Gruppe einer solchen $r_{n,1}$ nur einer Curve an.

5. Die Büschel von Curven C_n, welche eine Curve $n$ter Ordnung je mit den Curven C_n eines Büschels bestimmt (die Strahlenbüschel (P) und (P') sind hierbei in ihrer bisherigen Function angenommen), bilden einen „Bündel zweiter Stufe"; ihm gehören die Curven jedes Büschels an, welcher durch zwei seiner Curven bestimmt ist. Durch die Curven des Bündels werden nämlich auf jeder Geraden durch P' die Gruppen einer Reihe $r_{n,2}$ bestimmt, welche jede zwei ihrer Gruppen vereinigende Reihe $r_{n,1}$ enthält. Die Verbindung einer Curve C_n mit den Curven eines Bündels zweiter Stufe durch Büschel giebt einen Bündel dritter Stufe u. s. f., bis man zu dem Bündel gelangt, welcher alle Curven $n$ten Grades umfasst. Man zeigt allemal analog wie vorhin, dass jeder Büschel, welchen irgend zwei Curven eines Bündels $k$ter Stufe bestimmen, dem Bündel angehört. — Durch einen Bündel $n$ter Stufe werden die n-Punktesysteme der Geraden durch P' collinear auf einander bezogen. Nimmt man zur Erzeugung der Curven dieses Bündels an Stelle von P' den Punkt P'', so werden nach 4. im allgemeinen auch die n-Punktesysteme der Geraden durch P'' collinear auf einander bezogen. Jeder Gruppe auf einer derselben ist nämlich auf den anderen je eine Gruppe zugeordnet; den Gruppen einer $r_{n,1}$ entsprechen wieder Gruppen von Reihen $r_{n,1}$. Ebenso sind die n-Punktesysteme auf den Geraden durch P' durch den Bündel collinear auf die Punktreihen der Geraden durch P'' bezogen. Ein Büschel von Curven ist also unabhängig von den Punkten P und P'. Die beiden collinearen n-Punktesysteme, welche durch den Curvenbündel auf der Geraden $\overline{P'P''}$ bestimmt werden, je nachdem man P' oder P'' zur Erzeugung der Curven benutzt, haben alle vollständigen Gruppen und damit alle Reihen $r_{n,n-1}$ als entsprechend gemein, fallen folglich zusammen. Hieraus folgt:

„Eine Curve $n$ten Grades bestimmt auf jeder Geraden eine einzige durch einen Bündel $\beta_{n,n-1}$ charakterisirte Gruppe, unabhängig von der Wahl der Punkte P und P'."

§ 13.

Polaren.

Durch eine Curve $n$ten Grades C_n ist auf jeder Geraden eine Reihe $r_{n,n-1}$ bestimmt, nämlich die Polarreihe der Gruppe, welche sie auf der

Geraden ausschneidet. Die Reihen $r_{n,n-1}$, welche von der Curve auf den Geraden durch einen Punkt P' bestimmt werden, werden von einem Punkte P aus auf eine Gerade g in den Reihen eines Bandes B $n$ter Ordnung projicirt. Die Gruppen der Normalkette K, welche zur Erzeugung von C_n dient, haben nämlich diese Reihen zu Polarreihen. Das Band B enthält die Reihe $s^0_{n,n-1}$, deren Haupt P^0, Schnitt von g mit $\overline{PP'}$, das Centrum von K, ist. — Die Gruppen der von C_n auf den Geraden durch P' bestimmten Reihen $r_{n,n-1}$, welche den Punkt P' enthalten, gründen sich auf die Gruppen von Reihen $r_{n-1,n-2}$. Die Hauptgruppen (Ordnungspunkte) dieser Reihen bilden eine Curve C_{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung. Denn die Reihen des Bandes B haben mit $s^0_{n,n-1}$ die Reihen eines Bandes b von der Ordnung $n-1$ gemein; sie gründen sich auf die Projectionen jener $r_{n-1,n-2}$ von P aus. Die Gruppen, deren Polarreihen diese Projectionen sind, bilden offenbar eine Normalkette $(n-1)$-ter Ordnung k mit dem Centrum P^0; sie dient mit den Punkten P' und P zur Erzeugung von C_{n-1}.

Jede Gerade durch P', welche einen Schnittpunkt von C_n mit C_{n-1} enthält, ist Tangente von C_n in diesem Punkte.

Denn entspricht dieser Geraden die Gruppe Γ der Normalkette K und von k die Gruppe γ, so ist Γ und γ (dieses mit dem Punkte P^0 verbunden) in derselben Reihe $s^a_{n,n-1}$ enthalten. Die Polarreihe von Γ enthält daher die Hauptgruppe (P^a) und diejenige von γ die Hauptgruppe (P^a) vom $(n-1)$-Punktesystem. Die Polarreihe von Γ enthält hiermit (P^a) und $((P^a)P^0)$, bei welcher Gruppe (P^a) $(n-1)$-fach zu zählen ist; es gehört ihr also die lineare Unterreihe von $s^a_{n,n-1}$ an. Die Gruppe Γ ist daher in der $(n-2)$-ten Ueberreihe von (P^a) d. h. in der Reihe $s^{aa}_{n,n-2}$ enthalten, besitzt also zwei zusammenfallende Punkte.

Die Curve C_{n-1} heisse die „Polare“ des Punktes P' in Bezug auf die Curve C_n.

§ 14.

Erzeugung der Curve $n$ten Grades mittelst Büschel von Curven $(n-1)$-ten Grades.

Erster Satz: Ein Büschel von Curven C_{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung und ein zu ihm projectivischer Strahlenbüschel erzeugen eine Curve $n$ten Grades.

Ein Büschel von Curven ist zu einer Punktreihe projectivisch, wenn die Reihe, welche die Curven auf einer Geraden ausschneiden, zu ihr projectivisch ist.

P sei das Centrum des Strahlenbüschels; der Geraden L^0 durch P sei die Curve C^0_{n-1} zugeordnet. Die Curve C^0_{n-1} je mit einer Geraden durch P zusammengenommen bildet einen Büschel von Curven $n$ter Ordnung; derselbe bestimmt auf jeder Geraden eine Reihe α, deren Gruppen nur einen veränderlichen Punkt besitzen (Axreihe des Bandes der singulären Reihen). Die Curven C_{n-1} mit der Geraden L^0 je zusammengenommen bilden einen Büschel von Curven $n$ter Ordnung, welcher auf jeder Geraden der Ebene eine Reihe $s_{n,1}$ mit einem Haupte bestimmt. Die Reihen α und $s_{n,1}$ haben auf derselben Geraden eine Gruppe gemein und sind projectivisch zu einander, wenn jeder Curve des ersten Büschels mit einer Geraden L durch P diejenige des zweiten zugewiesen wird, welche die zu L zugeordnete Curve C_{n-1} enthält. Die den Reihen gemeinsame Gruppe entspricht sich selbst (denn L^0 ist C^0_{n-1} zugeordnet). Die beiden Büschel von Curven $n$ter Ordnung sind in einem Bündel zweiter Stufe enthalten. Dieser bestimmt auf jeder Geraden eine Reihe $r_{n,2}$. Durch die Beziehung von $r_{n,2}$ auf die Ebene ist jeder Curve des Bündels ein Punkt und jedem Büschel eine Gerade derselben zugeordnet und umgekehrt. Obigen Büscheln von Curven $n$ter Ordnung entsprechen hierbei zwei perspectivisch gelegene Punktreihen. Hieraus folgt: die Büschel, welche je durch zwei einander zugeordnete Curven der beiden Büschel bestimmt sind, haben sämmtlich eine Curve $n$ten Grades C_n gemein; auf ihr liegen die Schnitte dieser Curven. C_n geht offenbar durch P und die Grundpunkte des Büschels der Curven C_{n-1}.

2. Schneidet eine Curve C^0_{n-1} mit einer Curve C_n $n$ten Grades auf einer durch den Punkt P von C_n gehenden Geraden L^0, von P abgesehen, dieselbe Gruppe aus, so gehört C^0_{n-1} einem Büschel an, dessen Curven C_{n-1} auf je einer Geraden durch P mit C_n dieselbe Gruppe ausschneiden. Der Büschel der Strahlen durch P ist hierdurch auf den Curvenbüschel projectivisch bezogen.

Beweis: Die Geraden durch P mit der Curve C^0_{n-1} zusammengenommen bilden einen Büschel B von Curven $n$ter Ordnung. B bestimmt mit C_n einen Bündel $\mathfrak{B}$ zweiter Stufe. Die Curven von $\mathfrak{B}$ bestimmen auf einer Geraden g eine Reihe $R_{n,2}$, die Curven von B eine Axreihe α des Bandes der singulären Reihen, C_n endlich schneide auf g die Gruppe Γ aus. Die Reihe $s^0_{n,n-1}$, welche P^0, den Schnitt von L^0 mit g zum Haupte hat, habe mit $R_{n,2}$ die Reihe $S_{n,1}$ gemein. $S_{n,1}$ und α sind durch die Reihen $r_{n,1}$ von

$R_{n,2}$, welche Γ enthalten, perspectivisch auf einander bezogen. Jede Curve von $\mathfrak{B}$, welche eine Gruppe von $S_{n,1}$ ausschneidet, zerfällt in L^0 und eine Curve C_{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung. Denn eine Curve des Büschels B mit der Geraden L als Theil bestimmt mit C_n einen Büschel, dessen Curven auf L^0 und L dieselbe Gruppe ausschneiden (§ 12, 1). Die durch P^0 gehende Curve dieses Büschels zerfällt aber in L^0 und eine Curve C_{n-1}. Alle diese Curven bilden einen Büschel, da sie auf jeder Geraden die Gruppen einer $r_{n-1,1}$ (auf welche sich $s_{n,1}$ gründet) ausschneiden. Durch die Beziehung von α auf $S_{n,1}$ ist offenbar der Büschel der Curven C_{n-1} auf den Strahlenbüschel (P') projectivisch bezogen, so dass einer Curve C_{n-1} die Gerade entspricht, auf welcher sie mit C_n dieselbe Gruppe ausschneidet.

3. ***Mannigfaltigkeit der Curven nten Grades.*** Die Curven eines Bündels $k$ter Stufe, welche durch einen Punkt gehen, bilden im allgemeinen einen Bündel $(\varkappa-1)$-ter Stufe. Man beweist dies leicht mittelst des Schlusses von $\varkappa$ auf $\varkappa+1$; der Satz gilt für $\varkappa = 1$.

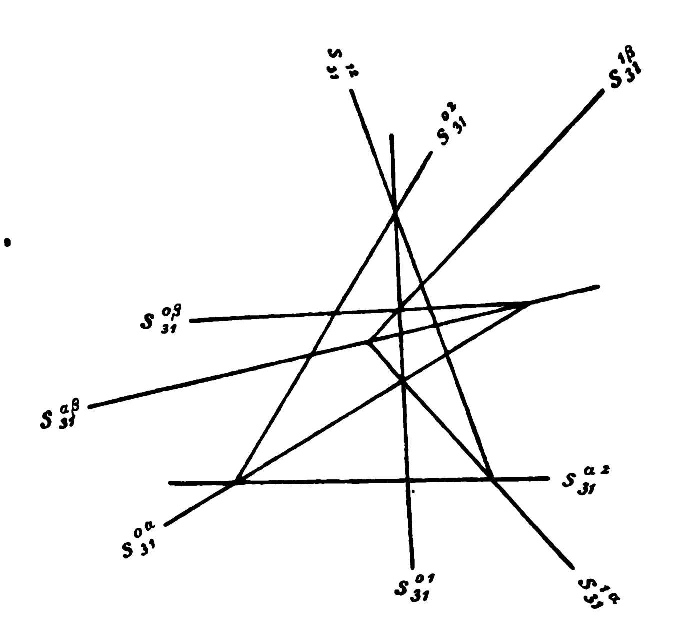
λ sei die Anzahl der Punkte, durch welche eine Curve $(n-1)$-ter Ordnung bestimmt ist, welche auf einer Geraden eine bestimmte Gruppe ausschneiden soll. Es lassen sich nach 2. auf einer Curve C_n $n$ter Ordnung λ beliebige Punkte als Grundpunkte eines Büschels von Curven C_{n-1} wählen, welche mit den Strahlen durch den Punkt P auf C_n die Curve C_n erzeugen. Auf den Geraden L und L' durch P schneide C_n die Gruppen Γ und Γ' aus (von P abgesehen). Durch $\lambda+1$ Punkte von C_n ist eine Curve bestimmt, welche durch P geht und auf L und L' die Gruppen Γ und Γ' ausschneidet. Nehmen wir $n-1$ Curven $n$ten Grades, welche durch P gehend auf L die Gruppe Γ und auf L' $n-1$ nicht zu derselben $r_{n-1,n-2}$ gehörige Gruppen ausschneiden, so ist durch sie ein Bündel $(n-1)$-ter Stufe bestimmt, dessen Curven durch jene $\lambda+1$ Punkte gehen; er enthält auch alle Curven durch diese Punkte. Durch $n-1$ Punkte geht im allgemeinen eine Curve des Bündels (dies folgt aus Anfang von 3). Durch $\lambda+1+n-1$ Punkte ist daher im allgemeinen eine Curve festgelegt, welche durch P geht und auf L eine bestimmte Gruppe ausschneidet. Durch $\lambda+n$ Punkte ist somit ein Bündel $(n-1)$-ter Stufe von Curven C_n bestimmt, welche auf L ausser P eine gegebene Gruppe ausschneiden. Durch $\lambda+n+n$ Punkte ist hiernach im allgemeinen eine Curve $n$ten Grades bestimmt. Man erkennt leicht, dass $\lambda+n$ die Anzahl der Punkte ist, durch welche eine Curve festgelegt ist, welche auf einer Geraden eine gegebene Gruppe ausschneiden soll. λ beträgt 3 für

$n = 3$. Im allgemeinen Falle ist daher λ gleich der Anzahl der Punkte, in welchen sich n Gerade einer Ebene gegenseitig schneiden.

Aus diesem Satze folgt, dass die hier definirte Curve von derselben Mannigfaltigkeit ist wie die durch eine Gleichung $n$ten Grades analytisch bestimmte. Man erhält durch die gegebene Erzeugung alle algebraischen ebenen Curven $n$ten Grades und umgekehrt. Hiermit ist die Absicht, welche die Abhandlung mit der Anwendung der vorgeführten Methode verfolgte, erreicht.

Noten.

Note 1 zu § 2 S. 236 Bd. 110: Dieser Beweis lässt sich veranschaulichen. Die Reihen s^0_{32}, s^1_{32} und s^α_{32}, s^β_{32} lassen sich mittelst der Beziehung von S^2 auf die Ebene collinear so auf die Ebene beziehen, dass den Reihen, welche sie mit einander gemein haben, in allen Beziehungen dieselben Geraden in derselben Weise projectivisch zugeordnet sind. (Die collineare Beziehung zweier Ebenen ist nämlich durch die Zuordnung zweier Paare von projectivischen Punktreihen bestimmt.) In der Figur besitzen die Geraden die Bezeichnungen der Reihen, welche sie vorstellen.



Note 2*) zu S. 247 Bd. 110: Man erzeugt die Reihe $r_{n+1,n}$, was die Absicht dieses Satzes ist, auch auf folgende Weise, die sich zur Anschauung bringen lässt: Man nimmt zum Zwecke der Construction in der Ebene eine singuläre zweidimensionale Reihe von S^n (die mit dem Zweipunktesystem als Grundreihe nach dem *Hesse*schen Princip in der Ebene dargestellt wird),

*) Man vgl. auch: *H. Thieme:* Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme. Zeitschr. für Mathem. und Physik, Bd. 24. — *H. Wiener:* Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen. Habilitationsschrift. Darmstadt 1885. — *de Paoli:* Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. Memorie delle Società Italiana, Ser. III, t. VII.

deren Gruppen $n-2$ Punkte gemein haben, und fügt ihren Gruppen nach einander die Punkte der Geraden zu, so dass man eine Schaar von singulären Reihen von S^{n+1} erhält. Die Schaar macht eine dreidimensionale Reihe $S_{n+1,3}$ aus. $S_{n+1,3}$ sei auf den Raum bezogen. Die Geraden, welche im Raume den Reihen entsprechen, die $S^0_{n+1,n-1}$, $S^1_{n+1,n-1}$, $S^\alpha_{n+1,n-1}$ und $S^\beta_{n+1,n-1}$ mit $S_{n+1,3}$ gemein haben, gehören derselben Ebene an (Note 1). Die Gruppen, welche den Punkten der Ebene entsprechen, gehören der durch $S^0_{n+1,n-1}$ und $S^1_{n+1,n-1}$ bestimmten Reihe $r_{n+1,n}$ an. Setzt man an Stelle von $S_{n+1,3}$ alle analogen Reihen, so erhält man alle Gruppen von $r_{n+1,n}$.

Dass $S^\alpha_{n+1,n-1}$ und $S^\beta_{n+1,n-1}$ eine Reihe $s^{\alpha\beta}_{n+1,n-2}$ gemein haben, ist bewiesen, wenn gezeigt wird, dass jede Gruppe von $S^\alpha_{n+1,n-1}$, welche P^β enthält, $S^\beta_{n+1,n-1}$ angehört. Hierzu nehme man eine Reihe $S_{n+1,3}$ mit $n-2$ Häuptern (worunter nicht P^α und P^β), welche diese Gruppe enthält.

Auf dieser Erzeugungsweise beruht die in der Ebene vollziehbare Construction des $(n+1)$-ten Punktes zu n Punkten für eine Reihe $r_{n+1,n}$, wenn letztere irgendwie (etwa durch $n+1$ Gruppen von je $n+1$ Punkten) bestimmt ist.

Note 3 zu § 6 S. 251 Bd. 110: Die „Gruppe" im weiteren Sinne (welche im Falle des n-Punktesystems aus weniger als n Punkten bestehen kann) ist das eigentliche Resultat des unter dem Begriff Bündel $\beta_{n,n-1}$ verstandenen Gewebes von Operationsregeln. Die in der Arbeit angegebenen Operationsregeln zielen alle (Reihen, Bündel u. s. f.) auf die Bestimmung von Punkten ab. Das Resultat des Bündels $\beta_{n,n-1}$ bilden die Häupter der Reihen $s^\xi_{n,n-1}$, welche ihm angehören. Wird an Stelle von Bündel $\beta_{n,n-1}$ innerhalb einer Reihe von Operationen im Ausdrucke schlechtweg Gruppe gesetzt (Bündel zu denken), so muss, da dieselbe Gruppe das Resultat verschiedener $\beta_{n,n-1}$ sein kann, eine Gruppe je nach der Operationsregel, welche sie nennt, verschiedene Bezeichnung erfahren. Am Schluss der Reihe von Operationen hat die Gruppe ihren eigentlichen Sinn als Resultat.

Note 4 zu § 7, S. 253 Bd. 110: Die beste Definition (naturgemässeste) von „Band" ist die: ein Band wird von den Reihen eines Aggregates gebildet, welche in einer collinearen Beziehung des Aggregates auf das gleichstufige Punktesystem seinen singulären Reihen von der höchsten Stufe entsprechen. Die Eigenschaften des Bandes $n$ter Ordnung leiten sich aus denen des Bandes der Reihen $s^\xi_{n,n-1}$ ab. Die Eigenschaften dieses Bandes selbst kann man aber schon an den für die singulären Reihen gebrauchten symbolischen Bezeichnungen ablesen.

Ueber Biegungscovarianten.

(Von Herrn *J. Knoblauch.*)

Wird gleichzeitig mit einer binären quadratischen Differentialform

$$a_{11}du^2+2a_{12}du\,dv+a_{22}dv^2 = \mathsf{A}$$

ein System von Functionen

$$\varphi(u, v), \quad \psi(u, v), \quad \dots$$

durch Einführung neuer Variablen transformirt, so gehen bekanntlich gewisse, aus den Differentialquotienten dieser Functionen, sowie den Coefficienten a_{ik} und deren Ableitungen rational zusammengesetzte Ausdrücke in die formell gleichgebildeten über. Diese „invariablen Functionen“, unter welchen die von *Beltrami* eingeführten Differentialparameter an erster Stelle stehen, mögen im Hinblick auf die flächentheoretische Bedeutung der Form

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 = ds^2$$

als Biegungscovarianten der Functionen $\varphi, \psi, \dots$ bezeichnet werden, während nach *Weingartens* Vorgang der Name „Biegungsinvarianten“ für solche Grössen der genannten Eigenschaft vorbehalten bleiben soll, welche nur von den Coefficienten a_{ik}, aber nicht von willkürlichen Functionen abhängen. Die folgende Untersuchung beschränkt sich auf Biegungscovarianten einer einzigen Function φ. Die Ausdehnung auf ein System mehrerer Functionen, so weit sie der Natur der Sache nach möglich ist, bedarf keiner weiteren Ausführung. Auch ist ersichtlich, in welchen Richtungen sich die Resultate für quadratische Differentialformen von mehr als zwei Variablen verallgemeinern lassen, wenn die grundlegenden Untersuchungen *Beltramis* und *Christoffels* in Betracht gezogen werden.

I.

Die Coefficienten der quadratischen Form, welche aus der gegebenen durch Einführung neuer Veränderlichen (u', v') hervorgeht, seien mit $a'_{\lambda\mu}$

bezeichnet, die Variablenpaare, wo es zweckmässig erscheint, auch mit (u_1, u_2) und (u'_1, u'_2). Die vier Differentiale in der Gleichung

$$(1.)\qquad \sum_{i,k} a_{ik}\,du_i\,du_k = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\,du'_\lambda\,du'_\mu \qquad (i, k, \lambda, \mu = 1, 2)$$

oder

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}'$$

sind durch die Gleichungen

$$du'_\alpha = \sum_\nu \frac{\partial u'_\alpha}{\partial u_\nu}\,du_\nu$$

verbunden, deren Determinante

$$\frac{\partial(u'_1, u'_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \Delta'$$

von Null verschieden ist. Vermöge der Transformationsformeln

$$(2.)\qquad a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

gilt für die Determinanten

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = a,\quad a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12} = a'$$

der beiden Formen die Gleichung

$$(3.)\qquad \sqrt{a} = \Delta'.\sqrt{a'}.$$

Ist $a > 0$, wie in der Flächentheorie für $\mathsf{A} = ds^2$, so empfiehlt es sich, die Bezeichnung so zu wählen, dass Δ' positiv wird, und dann unter $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$ die positiven Werthe der Quadratwurzeln zu verstehen.

Wird gleichzeitig mit A eine zweite quadratische Differentialform

$$b_{11}du^2+2b_{12}du\,dv+b_{22}dv^2 = \mathsf{B}$$

transformirt, so ergeben sich die beiden algebraischen absoluten Invarianten

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = H(\mathsf{A}, \mathsf{B}) \\[2ex] \dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = K(\mathsf{A}, \mathsf{B}). \end{cases}$$

Setzt man z. B.

$$\mathsf{B} = d\varphi^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2,$$

wo φ eine beliebige Function von u und v bedeutet, so wird, während $K(\mathsf{A}, d\varphi^2)$ verschwindet,

$$(5.)\qquad H(\mathsf{A}, d\varphi^2) = \frac{1}{a}\left(a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right).$$

Dies ist der *Beltrami*sche Differentialparameter erster Ordnung $\Delta_a^1\varphi$.

Ausser dieser simultanen Invariante der quadratischen Form A und der linearen Form $d\varphi$ ist noch die lineare Covariante zu berücksichtigen, welche durch Bildung der Functionaldeterminante von A und $d\varphi$ in Bezug auf die Differentiale du und dv entsteht. Da diese Determinante sich bei der Transformation um den Factor Δ' ändert, so ergiebt sich mit Hülfe von (3.) der Ausdruck

$$(6.)\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du+\left(a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv\right] = \varphi_1 du+\varphi_2 dv = \Phi_0$$

als absolute simultane Covariante. Ist $\overline{\varphi}(u', v')$ der Werth der Function $\varphi(u, v)$, in den neuen Variablen dargestellt, so können mithin die Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v}+\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

durch

$$(7.)\quad \varphi_1 = \varphi_1'\frac{\partial u'}{\partial u}+\varphi_2'\frac{\partial v'}{\partial u},\quad \varphi_2 = \varphi_1'\frac{\partial u'}{\partial v}+\varphi_2'\frac{\partial v'}{\partial v}$$

ersetzt werden.

II.

Zur Transformation der zweiten Differentialquotienten von φ könnte man von der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial v'}\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2}$$

und den analogen ausgehen und die sechs zweiten Ableitungen der Variablen u' und v' mit Hülfe der *Christoffel*schen Formeln (dieses Journal Bd. 70, S. 49) eliminiren, welche aus den Transformationsrelationen (2.) abgeleitet werden können. Uebersichtlicher verfährt man, wenn man einen anderen Weg einschlägt, auf welchem diese Formeln nicht gebraucht werden, vielmehr als Folgerungen erscheinen. In der Theorie der Flächen genügt jede der Cartesischen Coordinaten einem System partieller Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}-J_1\frac{\partial\chi}{\partial u}-J_2\frac{\partial\chi}{\partial v} = L\mathsf{X},$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial u\partial v}-J_1'\frac{\partial\chi}{\partial u}-J_2'\frac{\partial\chi}{\partial v} = M\mathsf{X},$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}-J_1''\frac{\partial\chi}{\partial u}-J_2''\frac{\partial\chi}{\partial v} = N\mathsf{X}.$$

(Vgl. über die Bezeichnungen meine Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, S. 78.) Die Form dieser Gleichungen lässt es als zweckmässig erkennen, auch für eine beliebige Function von u und v an Stelle der zweiten Ableitungen von vornherein diejenigen Grössen einzuführen, welche den linken Seiten analog gebildet sind. Es werde gesetzt:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_{11},\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_{12},\\[2mm] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \varphi_{22}. \end{cases}$$

Hierin ist (nach *Christoffel*scher Bezeichnung)

$$(2.)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{a}\Big(\tfrac{1}{2}a_{22}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial u}-a_{12}\Big(\dfrac{\partial a_{12}}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial v}\Big)\Big),\\[2mm] \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{a}\Big(\tfrac{1}{2}a_{22}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial v}-\tfrac{1}{2}a_{12}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial u}\Big),\\[2mm] \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{a}\Big(a_{22}\Big(\dfrac{\partial a_{12}}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial u}\Big)-\tfrac{1}{2}a_{12}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial v}\Big), \end{cases}$$

während $\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$ sich durch Vertauschung von u mit v, a_{11} mit a_{22} ergeben. In allen Untersuchungen, bei welchen die ersten Ableitungen der Coefficienten a_{ik} vorkommen, hat man diese Grössen anstatt der Ableitungen zu verwenden.

Es seien nun mit φ'_{ik} diejenigen Ausdrücke bezeichnet, welche aus den Ableitungen von $\bar{\varphi}$ und den Grössen a'_{ik} ebenso zusammengesetzt sind wie die φ_{ik} aus den Differentialquotienten von φ und den Coefficienten a_{ik}. Zwei Gleichungen zwischen den sechs Grössen erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$(3.)\quad \Delta^1_a\varphi = \Delta^1_{a'}\bar{\varphi},$$

welche die Covarianz des Differentialparameters erster Ordnung ausdrückt. Es folgt, mit Benutzung der Ausdrücke der Ableitungen $\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}$ durch die Grössen $\begin{Bmatrix}\lambda\ \mu\\ \nu\end{Bmatrix}$, unter Fortlassung des unteren Index der Differentialparameter:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Delta^1\varphi}{\partial u} = \dfrac{1}{a}\Big[\Big(a_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)\varphi_{11}+\Big(a_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)\varphi_{12}\Big],\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Delta^1\varphi}{\partial v} = \dfrac{1}{a}\Big[\Big(a_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)\varphi_{12}+\Big(a_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)\varphi_{22}\Big], \end{cases}$$

d. h., wenn die durch I. (6.) definirten Grössen φ_1, φ_2 eingeführt werden:

$$(4^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta^1\varphi}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\varphi_{12}-\varphi_2\varphi_{11}),\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta^1\varphi}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\varphi_{22}-\varphi_2\varphi_{12}).\end{cases}$$

Mithin sind die beiden gesuchten Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\varphi_{12}-\varphi_2\varphi_{11}) = \dfrac{1}{\sqrt{a'}}\Big[(\varphi'_1\varphi'_{12}-\varphi'_2\varphi'_{11})\dfrac{\partial u'}{\partial u}+(\varphi'_1\varphi'_{22}-\varphi'_2\varphi'_{12})\dfrac{\partial v'}{\partial u}\Big],\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\varphi_{22}-\varphi_2\varphi_{12}) = \dfrac{1}{\sqrt{a'}}\Big[(\varphi'_1\varphi'_{12}-\varphi'_2\varphi'_{11})\dfrac{\partial u'}{\partial v}+(\varphi'_1\varphi'_{22}-\varphi'_2\varphi'_{12})\dfrac{\partial v'}{\partial v}\Big].\end{cases}$$

Eine dritte ergiebt sich, wenn ausser der Function $\varphi(u, v)$ noch eine andere, $\psi(u, v)$, zusammen mit der quadratischen Differentialform transformirt wird. Man erhält dann eine neue Biegungscovariante

$$H(\mathsf{A},\ d\varphi . d\psi) = \frac{1}{a}\Big(a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v}-a_{12}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\Big)+a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\Big),$$

welche mit dem *Beltrami*schen Zwischenparameter identisch ist, und die Gleichungen, welche durch Differentiation von

$$\Delta(\varphi,\ \psi) = \Delta(\bar{\varphi},\ \bar{\psi}),\quad \Delta^1\psi = \Delta^1\bar{\psi}$$

entstehen, geben vier weitere Beziehungen zwischen φ_{11}, φ_{12}, φ_{22}, ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{22} und ihren entsprechenden Grössen. Sie können nach Analogie von (5.) sofort hingeschrieben werden, wenn man noch die Ausdrücke

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta(\varphi,\ \psi)}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\psi_{12}-\varphi_2\psi_{11}+\psi_1\varphi_{12}-\psi_2\varphi_{11}),\\ \dfrac{\partial \Delta(\varphi,\ \psi)}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1\psi_{22}-\varphi_2\psi_{12}+\psi_1\varphi_{22}-\psi_2\varphi_{12})\end{cases}$$

hinzunimmt. Eliminirt man nun die Grössen ψ_{ik} aus den vier letzten Relationen, so folgt mittels der Gleichungen I. (7.) die Formel

$$(7.)\quad \frac{1}{a}(\psi_2^2\varphi_{11}-2\psi_2\psi_1\varphi_{12}+\psi_1^2\varphi_{22}) = \frac{1}{a'}(\psi_2'^2\varphi'_{11}-2\psi'_2\psi'_1\varphi'_{12}+\psi_1'^2\varphi'_{22}).$$

Die Gleichungen (5.) können dadurch in eine symmetrischere Gestalt gesetzt werden, dass man sie mit $-\frac{1}{\sqrt{a}}\varphi_2$, $\frac{1}{\sqrt{a}}\varphi_1$, dann mit $-\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_2$, $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_1$ multiplicirt und jedesmal addirt. Es folgt:

$$(8.)\quad \frac{1}{a}(\varphi_2^2\varphi_{11}-2\varphi_2\varphi_1\varphi_{12}+\varphi_1^2\varphi_{22}) = \frac{1}{a'}(\varphi_2'^2\varphi'_{11}-2\varphi'_2\varphi'_1\varphi'_{12}+\varphi_1'^2\varphi'_{22}),$$

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{1}{a}(\varphi_2\psi_2\varphi_{11}-(\varphi_2\psi_1+\varphi_1\psi_2)\varphi_{12}+\varphi_1\psi_1\varphi_{22}) \\ \qquad = \frac{1}{a'}(\varphi'_2\psi'_2\varphi'_{11}-(\varphi'_2\psi'_1+\varphi'_1\psi'_2)\varphi'_{12}+\varphi'_1\psi'_1\varphi'_{22}). \end{cases}$$

Aus (8.), (9.) und (7.) könnten φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} berechnet werden. Das Resultat ergiebt sich in einfachster Form, wenn man beachtet, dass die linken Seiten dieser Gleichungen sich als simultane Invarianten der quadratischen Differentialform

$$(10.)\quad \varphi_{11}du^2+2\varphi_{12}du\,dv+\varphi_{22}dv^2 = \Phi,$$

der Form A und der drei Formen Φ_0^2, $\Phi_0\Psi_0$, Ψ_0^2 darstellen. Setzt man allgemein

$$(11.)\quad \frac{1}{a}(b_{11}c_{22}-2b_{12}c_{12}+b_{22}c_{11}) = H_a(\mathsf{B}, \Gamma),$$

so sind diese Invarianten mit

$$H_a(\Phi, \Phi_0^2),\quad H_a(\Phi, \Phi_0\Psi_0),\quad H_a(\Phi, \Psi_0^2)$$

zu bezeichnen. Nun gilt, wenn noch

$$(12.)\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = D_a(\varphi, \psi)$$

gesetzt wird, die Identität

$$(13.)\quad H_a(\Phi, \Phi_0^2)\Psi_0^2-2H_a(\Phi, \Phi_0\Psi_0)\Psi_0\Phi_0+H_a(\Phi, \Psi_0^2)\Phi_0^2 = D_a(\varphi, \psi)^2\Phi.$$

Sie liefert in Verbindung mit (7.), (8.), (9.) und der Covarianz der Functionaldeterminante, nämlich

$$(14.)\quad D_a(\varphi, \psi) = D_{a'}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}),$$

die Relation

$$(15.)\quad \Phi = \Phi'.$$

Aus den Voraussetzungen

$$a_{11}du^2+2a_{12}du\,dv+a_{22}dv^2 = a'_{11}du'^2+2a'_{12}du'\,dv'+a'_{22}dv'^2,$$
$$\varphi(u, v) = \bar{\varphi}(u', v')$$

folgt mithin die Gleichung

$$(15^a.)\quad \varphi_{11}du^2+2\varphi_{12}du\,dv+\varphi_{22}dv^2 = \varphi'_{11}du'^2+2\varphi'_{12}du'\,dv'+\varphi'_{22}dv'^2.$$

Mit anderen Worten, die Grössen φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} genügen den Transformationsformeln

$$(16.)\quad \varphi_{ik} = \sum_{\lambda,\mu}\varphi'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

Im Besonderen wird für $\varphi = u'$:

$$\varphi'_{11} = -\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}', \quad \varphi'_{12} = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \quad \varphi'_{22} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}',$$

und für $\varphi = v'$:

$$\varphi'_{11} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}', \quad \varphi'_{12} = -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \quad \varphi'_{22} = -\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'.$$

Für diese Annahmen gehen die Gleichungen (16.) in die *Christoffel*schen Formeln über.

Die beiden simultanen Invarianten der Formen A und Φ haben die Ausdrücke

$$(17.)\quad \begin{cases} H(\mathsf{A}, \Phi) = \dfrac{a_{11}\varphi_{22} - 2a_{12}\varphi_{12} + a_{22}\varphi_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ K(\mathsf{A}, \Phi) = \dfrac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{cases}$$

Die erste ist nichts anderes als *Beltramis* Differentialparameter zweiter Ordnung $\Delta_a^2\varphi$.

III.

Von der Form Φ ausgehend, kann man für die höheren Differentialquotienten von φ ohne weiteres Transformationsformeln finden, welche, wie die eben aufgestellten (16.), bloss die ersten Ableitungen von u' und v' nach u und v enthalten. Man hat zu diesem Zweck nur das Verfahren *Christoffels* anzuwenden, welches ich bereits früher gelegentlich einer speciellen flächentheoretischen Untersuchung auf die simultane Transformation zweier quadratischen Differentialformen ausgedehnt habe. *Christoffel* hat (a. a. O. S. 57) nachgewiesen, dass man aus einer μ-fach linearen Form, welche gleichzeitig mit A transformirt wird, stets eine $(\mu+1)$-fach lineare covariante Form ableiten kann. Für den vorliegenden Fall ist μ zunächst gleich 2, und die bilineare Differentialform, von welcher auszugehen ist, hat den Ausdruck:

$$(1.)\quad \varphi_{11}du\delta u + \varphi_{12}(du\delta v + dv\delta u) + \varphi_{22}dv\delta v = \mathfrak{F}_2.$$

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(2.)\quad \frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial u_l} - \sum_{\nu=1,2}\left[\begin{Bmatrix}kl\\\nu\end{Bmatrix}\varphi_{i\nu} + \begin{Bmatrix}il\\\nu\end{Bmatrix}\varphi_{\nu k}\right] = \varphi_{ikl}, \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

so ist

$$(3.)\quad \Sigma\varphi_{ikl}du_i\delta u_k\mathfrak{d}u_l = \mathfrak{F}_3$$

eine Covariante, d. h. es gelten die Relationen:

$$(4.)\qquad \varphi_{ikl} = \sum_{p,q,r} \varphi'_{pqr} \frac{\partial u'_p}{\partial u_i} \frac{\partial u'_q}{\partial u_k} \frac{\partial u'_r}{\partial u_l}.$$

Dieses System, welches wegen $\varphi_{ki} = \varphi_{ik}$, d. h. $\varphi_{kil} = \varphi_{ikl}$, sechs verschiedene Gleichungen enthält, liefert jedoch insofern zuviel, als die Anzahl der zu transformirenden Differentialquotienten dritter Ordnung nur gleich vier ist. Setzt man aber die drei, in der trilinearen Form $\mathfrak{F}_3$ vorkommenden Differentiale einander gleich, geht also von $\mathfrak{F}_3$ zu der zugehörigen Form

$$(5.)\qquad \Sigma \varphi_{ikl} du_i du_k du_l = \Phi_3$$

über, so erhält man die Transformationsgleichungen genau in der richtigen Anzahl. Wird

$$(6.)\quad \varphi_{111} = \varphi_{30},\quad \varphi_{112}+2\varphi_{121} = 3\varphi_{21},\quad \varphi_{221}+2\varphi_{212} = 3\varphi_{12},\quad \varphi_{222} = \varphi_{03}$$

bezeichnet, so lässt sich schreiben:

$$(5^a.)\qquad \Phi_3 = \sum_{(\lambda+\mu=3)} \frac{3!}{\lambda!\,\mu!} \varphi_{\lambda\mu} du^\lambda dv^\mu,$$

und die aus (4.) folgenden Relationen zwischen den Grössen $\varphi_{\lambda\mu}$ und $\varphi'_{\lambda\mu}$ geben die Transformationsgleichungen für die dritten Differentialquotienten von φ in der verlangten Form. Dies Verfahren fortsetzend, gelangt man zu einer Reihe binärer Formen $\Phi_4, \Phi_5, \ldots$, allgemein

$$(7.)\qquad \Phi_\nu = \sum_{(\lambda+\mu=\nu)} \frac{\nu!}{\lambda!\,\mu!} \varphi_{\lambda\mu} du^\lambda dv^\mu,$$

welche aus den, nach dem *Christoffel*schen Schema zu bildenden Formen $\mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5, \ldots$ durch Gleichsetzung der verschiedenen Differentiale hervorgehen und vermöge der Gleichung

$$\Phi_\nu = \Phi'_\nu$$

die Transformation der höheren Ableitungen liefern. Jeder Coefficient $\varphi_{\lambda\mu}$ $(\lambda+\mu=\nu)$ enthält eine Ableitung νter Ordnung. Das Bildungsgesetz dieser Coefficienten kann, wie leicht zu sehen, sehr vereinfacht werden, wenn eben, wie hier, nur die binären, aber nicht die mehrfach linearen Differentialformen in Betracht kommen. Bei grundsätzlicher Anwendung der eben benutzten Bezeichnung würde noch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_{10},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_{01},\quad d\varphi = \Phi_1,$$

und in (10.)

$$\varphi_{11} = \varphi_{20},\quad \varphi_{12} = \varphi_{11},\quad \varphi_{22} = \varphi_{02},\quad \Phi = \Phi_2$$

zu setzen sein.

Auf Grund dieser Umwandlung der Transformationsrelationen ergiebt sich nun für die Biegungscovarianten eine einfache und häufig brauchbare Darstellungsform. Wie man die Gleichungen für die Biegungscovarianten bis zu einer bestimmten, der $n$ten Ordnung, auch bilden möge, so erscheinen sie jedenfalls als Folgerungen aus dem Gleichungssystem, welches man erhält, wenn man aus

$$\varphi(u, v) = \bar{\varphi}(u', v')$$

alle Differentialquotienten $\frac{\partial^{\lambda+\mu}\varphi}{\partial u^\lambda \partial v^\mu}$ $(\lambda+\mu \leqq n)$ ableitet und die Derivirten der Transformationsgleichungen (I. (2.)) bis zur $(n-1)$-ten Ordnung hinzunimmt. Und zwar sind aus dem Gesammtsystem die Ableitungen der Grössen u' und v' zu eliminiren. Denkt man sich die Elimination nur bis zu den Differentialquotienten zweiter Ordnung einschliesslich ausgeführt, so entstehen Gleichungen für die Ableitungen von φ, welche, wenn sie unabhängig sind, ihrem Inhalte nach mit den, aus

$$(8.)\qquad \Phi_\nu = \Phi'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folgenden Transformationsrelationen übereinstimmen müssen. Allein die Anzahl jener Gleichungen ist zunächst grösser als die Anzahl der Differentialquotienten selbst. Denn bildet man die Ableitungen der Grössen u', v' von der dritten Ordnung an durch Differentiation der *Christoffel*schen Formeln, welche als die Auflösungen der ersten Derivirten der Transformationsgleichungen nach den Ableitungen zweiter Ordnung betrachtet werden können, so erscheinen diejenigen von ihnen, welche auf verschiedenen Wegen hergestellt werden können, auch unter verschiedenen Formen, und liefern daher beim Einsetzen auch verschiedene Ausdrücke für die Ableitungen von φ. Nun werden bekanntlich durch die Gleichung

$$(9.)\qquad K_a = K_{a'},$$

wo K_a die *Gauss*sche Invariante der Form A bezeichnet, und durch die Reihe ihrer Derivirten bis zur $(n-3)$-ten Ordnung die Integrabilitätsbedingungen für jene Differentialquotienten dargestellt. Nimmt man diese hinzu, so werden auch die Differentialquotienten von φ eindeutig bestimmt, und die für sie geltenden Gleichungen lassen sich durch die vorher genannten Transformationsrelationen ersetzen. Die hinzuzufügenden Derivirten der Gleichung (9.) können dabei selbst, nach Entfernung der Ableitungen zweiter bis $n$ter Ordnung von u' und v', successive durch Gleichungen zwischen

binären Differentialformen:

$$(10.)\qquad \mathsf{K}_1 = \mathsf{K}_1', \quad \ldots, \quad \mathsf{K}_{n-3} = \mathsf{K}_{n-3}'$$

ersetzt werden, in welchen irgend eine Form K_ϱ aus K_a ebenso gebildet ist wie Φ_ϱ aus φ.

Eliminirt man nunmehr die ersten Ableitungen von u' und v' aus den, zu (8.) und (10.) gehörigen Transformationsrelationen in der Weise, dass Gleichungen der Form

$$J = J'$$

entstehen, so ist der Ausdruck J, wenn er überhaupt Ableitungen von φ enthält, eine Biegungscovariante dieser Function, in welcher die Grösse K_a entweder gar nicht oder nur in ihren Ableitungen vorkommt. Alle Biegungscovarianten erhält man in bekannter Weise mit Hinzunahme der Gleichung (9.). Andererseits ist aber J eine Invariante (im gewöhnlichen Sinne) des Formensystems A, Φ_ν, K_ϱ. Mithin reducirt sich die Frage nach den Biegungscovarianten auf das Grundproblem der algebraischen Invariantentheorie.

IV.

Flächentheoretische Untersuchungen führen darauf, eine Function durch das gleichzeitige Verschwinden zweier Biegungscovarianten zu kennzeichnen. Es sei die Aufgabe vorgelegt, zu entscheiden, ob ein gegebenes Linienelement auf die *Liouville*sche Form gebracht werden könne, d. h. ob Variablen $u' = \varphi(u, v)$, $v' = \psi(u, v)$ existiren, für welche

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

in die Gestalt

$$(1.)\qquad ds^2 = (U' - V')(du'^2 + dv'^2)$$

übergeführt werden kann. Ist zunächst (u', v') überhaupt ein isometrisches System, so dass bei passender Wahl der Parameter:

$$ds^2 = E'(du'^2 + dv'^2),$$

so hat man nach *Beltrami* (Giornale di Matematiche, Vol. 2)

$$(2.)\qquad \Delta_{a'}^2 u' = \Delta^2 \varphi = 0,$$

$$(3.)\qquad \Delta_{a'}(v', u') = \Delta(\psi, \varphi) = 0.$$

Für die *Liouville*schen Flächen tritt die Bedingung

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 E'}{\partial u' \partial v'} = 0$$

hinzu, in welcher die Differentiationen nach u' und v' durch solche nach u und v zu ersetzen sind. Nun ist für $F' = 0$:

$$E' = \frac{1}{\Delta^1_{a'} u'} = \frac{1}{\Delta^1 \varphi},$$

und für irgend eine Function

$$\chi(u, v) = \bar{\chi}(u', v')$$

gelten, ebenfalls nach *Beltrami*, die Gleichungen:

$$(5.)\qquad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} = \frac{\Delta(\varphi, \chi)}{\Delta^1 \varphi}, \quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} = \frac{\Delta(\psi, \chi)}{\Delta^1 \psi}.$$

Sie liefern für $\chi = \frac{1}{\Delta^1 \varphi}$, $\bar{\chi} = E'$:

$$(6.)\qquad \frac{\partial E'}{\partial u'} = \frac{\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\Delta^1 \varphi}\right)}{\Delta^1 \varphi} = \omega,$$

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 E'}{\partial u' \partial v'} = \frac{\Delta(\psi, \omega)}{\Delta^1 \psi}.$$

Die Bedingung (4.), in der Form

$$\Delta(\psi, \omega) = 0$$

geschrieben und mit (3.) verglichen, besagt, dass ω eine Function von φ sein muss:

$$(8.)\qquad \frac{\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\Delta^1 \varphi}\right)}{\Delta^1 \varphi} = f(\varphi).$$

Ist also das gegebene Linienelement ein *Liouville*sches, so giebt es eine Function φ, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen (2.) und (8.) genügt.

Geht man umgekehrt von den beiden Annahmen

$$(9.)\qquad \Delta^2 \varphi = 0$$

und (8.), d. h.

$$D_a\left(\varphi, \frac{\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\Delta^1 \varphi}\right)}{\Delta^1 \varphi}\right) = 0$$

oder

$$(10.)\qquad D_a\left(\varphi, \frac{\Delta(\varphi, \Delta^1 \varphi)}{(\Delta^1 \varphi)^3}\right) = 0$$

aus und setzt $\varphi = u'$, nimmt ferner die Schaar $v' = C'$ orthogonal zu $u' = C$,

so dass $F' = 0$ wird, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{G'}{E'}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 E'}{\partial u' \partial v'} = 0,$$

mithin

$$G' = E' g(v')^2, \quad E' = U' - V',$$
$$ds^2 = (U'-V')(du'^2 + g(v')^2 dv'^2).$$

Die Bedingung für die Möglichkeit der Transformation eines Linienelements in die *Liouville*sche Form stimmt also überein mit derjenigen für die Existenz einer Function φ, welche die beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung (9.) und (10.) befriedigt.

In ganz ähnlicher Weise kann man z. B. für die *Bonnet*schen Flächen verfahren, für welche das Quadrat des Linienelements auf die Form

$$(11.) \qquad ds^2 = \frac{du'^2 + dv'^2}{(U'+V')^2}$$

gebracht werden kann. Man hat nur in der Bedingung (4.) E' durch $E'^{-\frac{1}{2}}$ zu ersetzen und erhält dann

$$(12.) \qquad \frac{\Delta(\varphi, \sqrt{\Delta^1 \varphi})}{\Delta^1 \varphi} = f_1(\varphi)$$

oder

$$(13.) \qquad D_a\left(\varphi, \frac{\Delta(\varphi, \Delta^1\varphi)}{(\Delta^1\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

als diejenige partielle Differentialgleichung, welcher die Function ausser der Bedingung (9.) zu genügen hat. Diese Gleichung ist in den Ableitungen zweiter Ordnung, die hinzutretende in beiden Fällen in denen der dritten Ordnung linear.

Zu einer befriedigenden expliciten Darstellung der Kennzeichen der in Rede stehenden Flächen wäre eine genaue Kenntniss der Relationen erforderlich, welche bewirken, dass das Verschwinden mehrerer Biegungscovarianten einer und derselben Function das Verschwinden von Biegungsinvarianten des Linienelementes nach sich zieht. Eine directe Elimination von φ, wenngleich der Herstellung von Biegungsinvarianten aus den Formen (1.) und (11.) und Elimination von U', V' vorzuziehen, führt bei dem jetzigen Stande der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu unübersichtlichen Resultaten.

V.

Wenn man auf einfachem Wege die fundamentale Biegungsinvariante, K_a, als solche nachweisen will, ohne Begriffe einzuführen, welche der Transformationstheorie fremd sind, so erweist es sich als zweckmässig, die willkürliche Function φ beizubehalten und von den Gleichungen III. (4.) auszugehen. Es werde die Differenz der beiden Grössen φ_{ikl} und φ_{ilk} gebildet, welche dieselbe dritte Ableitung von φ enthalten. Setzt man $k=1$, $l=2$, was offenbar ausreicht, so wird

$$\begin{aligned}\varphi_{i12}-\varphi_{i21} &= \sum_{p,q,r}\varphi'_{pqr}\frac{\partial u'_p}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u'_q}{\partial u_1}\frac{\partial u'_r}{\partial u_2}-\frac{\partial u'_q}{\partial u_2}\frac{\partial u'_r}{\partial u_1}\right)\\ &= \varDelta'.\sum_p(\varphi'_{p12}-\varphi'_{p21})\frac{\partial u'_p}{\partial u_i},\end{aligned}$$

mithin wegen $\sqrt{a}=\varDelta'.\sqrt{a'}$:

$$(1.)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_{i12}-\varphi_{i21}) = \sum_p\frac{1}{\sqrt{a'}}(\varphi'_{p12}-\varphi'_{p21})\frac{\partial u'_p}{\partial u_i}.$$

Hieraus folgt, dass

$$(2.)\qquad \sum_i\frac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_{i12}-\varphi_{i21})du_i = \mathrm{F}$$

eine lineare Covariante von A und Φ ist, welche als *Weingarten*sche bezeichnet werden soll [vgl. die Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884, S. 19—20]. Bei der Ausrechnung erhält man für die Coefficienten die Form

$$(3.)\qquad \varphi_{i12}-\varphi_{i21} = \sum_\nu A_{i\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu},$$

wo die Ausdrücke $A_{i\nu}$ allein von den Grössen $\left\{\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right\}$ und deren ersten Ableitungen abhängen. Zu der *Gauss*schen Invarianz gelangt man dann entweder, indem man die *Weingarten*sche Gleichung $\mathrm{F}=\mathrm{F}'$ noch für eine zweite Function ψ ansetzt und in Bezug auf die Differentiale die Functionaldeterminante bildet; oder durch den Nachweis der Gleichung

$$\mathrm{F} = K_a.\Phi_0,$$

mit Hülfe der aus

$$\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial v\partial u}\qquad (i,k=1,2)$$

folgenden Relationen.

Logau, October 1892.

Ueber Transformationen von Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Halle a. S.)

I.

Zu dem für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen so wichtigen Begriff der ***Differentialinvarianten*** ist man vermöge der Bemerkung gekommen, dass die Gleichung:

$$(1.)\quad D(y)=\frac{d^m y}{dx^m}+P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+P_{m-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_m(x).y=0$$

bei der Transformation:

$$(\text{T.})\qquad x=f(\xi),\quad y=g(\xi).\eta,$$

worin $f(\xi)$ und $g(\xi)$ beliebige Functionen von ξ sind, in eine Gleichung derselben Form:

$$(2.)\quad \Delta(\eta)=\frac{d^m\eta}{d\xi^m}+\Pi_1(\xi)\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}+\cdots+\Pi_{m-1}(\xi)\frac{d\eta}{d\xi}+\Pi_m(\xi).\eta=0$$

übergeht. Als Differentialinvariante von $D(y)$ ist daher jeder aus den Coefficienten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ gebildete Ausdruck zu bezeichnen, welcher bei der Transformation (T.) in den ebenso aus den Coefficienten der transformirten Gleichung $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ gebildeten bis auf einen allein von der Transformation abhängigen Factor übergeht.

Diese Definition der Differentialinvarianten leidet an einer gewissen Willkürlichkeit, denn es ist denkbar, dass noch andere Transformationen

$$x=f(\xi,\eta),\quad y=g(\xi,\eta)$$

existiren, welche auf eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung angewandt wieder eine solche Gleichung ergeben, und wäre dies der Fall, so müsste der Begriff der Differentialinvarianten entsprechend

verallgemeinert werden. Es dürfte daher von Interesse sein, dass, wie im ersten Abschnitte dieser Abhandlung bewiesen wird, sobald $m \geqq 2$ ist, jene Eigenschaft allein den Transformationen (T.) zukommt, für welche sie also characteristisch ist.

Ehe ich zum Beweise übergehe, glaube ich folgende Bemerkung vorausschicken zu sollen. Wie bei der Transformation der algebraischen Formen, bei welcher zuerst der Invariantenbegriff aufgetreten ist, die Untersuchung der Formen mit *allgemeinen* Coefficienten wesentlich verschieden ist von derjenigen der Formen mit *speciellen* Coefficienten, so ist auch bei der Transformation der Differentialgleichungen ein entsprechender Unterschied zu machen. Im Folgenden handelt es sich, wie dies in der Theorie der Differentialinvarianten bisher immer geschehen ist, um lineare homogene Differentialgleichungen mit allgemeinen Coefficienten und um Transformationen, welche, auf irgend eine solche Gleichung $m$ter Ordnung angewandt, stets wieder eine Gleichung derselben Art ergeben. Dagegen giebt es, wie ich ausdrücklich hervorheben möchte, für Gleichungen mit speciellen Coefficienten stets ausser den Transformationen (T.) noch andere Transformationen, vermöge deren man wieder eine solche Gleichung erhält; denn ist y_1 irgend ein Integral von $D(y) = 0$, so geht diese Gleichung durch

$$x = \xi, \quad y = \eta + y_1$$

in eine Gleichung der Form $\Delta(\eta) = 0$ über.

Aus den allgemeinen Transformationsgleichungen:

$$x = f(\xi, \eta), \quad y = g(\xi, \eta) \tag{3.}$$

folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial g}{\partial \xi}}{\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}} = \frac{Y_1}{\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{dY_1}{d\xi} - Y_1\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2} = \frac{Y_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^3},$$

und es wird daher:

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{Y_\mu}{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{2\mu-1}}, \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo Y_μ eine ganze rationale Function von $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^\mu\eta}{d\xi^\mu}$ ist; höhere Ableitungen von η kommen darin nicht vor.

Werden diese Ausdrücke für $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}$ in $D(y)=0$ eingesetzt, so ergiebt sich nach Multiplication mit $\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{2m-1}$ eine Differentialgleichung für η, deren linke Seite eine ganze rationale Function von $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ ist, nämlich:

$$Y_m + Y_{m-1}P_1\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2 + Y_{m-2}P_2\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^4 + \cdots$$
$$\cdots + Y_1P_{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{2m-2} + P_m g\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{2m-1} = 0.$$

Wo kommt in dieser Gleichung $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$, die höchste Ableitung von η, vor? In Y_1 ist der Coefficient der höchsten darin enthaltenen Ableitung von η, nämlich $\frac{d\eta}{d\xi}$,

$$H_1 = \frac{\partial g}{\partial\eta}.$$

In Y_2 ist entsprechend der Coefficient von $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$:

$$H_2 = \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta} - \frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial\eta};$$

diese Functionaldeterminante darf nicht identisch verschwinden, was für das Folgende wichtig ist. Für $\mu \geqq 3$ gilt, dass erstens Y_μ eine lineare Function von $\frac{d^\mu\eta}{d\xi^\mu}$, wie schon Y_1 und Y_2, ist, und zweitens der Coefficient H_μ von $\frac{d^\mu\eta}{d\xi^\mu}$ der Gleichung genügt:

$$H_\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)H_{\mu-1}.$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$H_\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{\mu-2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}-\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial g}{\partial\xi}\right). \quad (\mu = 2, 3, 4, \ldots, m)$$

Die transformirte Differentialgleichung ist also linear in $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$, und der Coefficient davon, H_m, ist nicht identisch gleich Null. Mithin lässt sie sich in

der Form schreiben:

$$\frac{d^m\eta}{d\xi^m}+\frac{\mathfrak{G}\left(\frac{d\eta}{d\xi},\ldots,\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}\right)}{H_m}+P_1Y_{m-1}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2}{H_m}+\cdots$$

$$\cdots+P_{m-1}Y_1\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{2m-2}}{H_m}+P_m g\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{2m-1}}{H_m}=0;$$

dabei bedeutet

$$\mathfrak{G}=Y_m-H_m\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$$

eine ganze rationale Function von $\frac{d\eta}{d\xi},\ldots,\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}$, welche ausserdem in ihren Coefficienten ξ und η enthält.

Nunmehr soll die Voraussetzung benutzt werden, dass die durch die eben hingeschriebene Gleichung definirte Function η auch einer linearen homogenen Differentialgleichung:

$$\varDelta(\eta)=\frac{d^m\eta}{d\xi^m}+\Pi_1\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}+\cdots+\Pi_{m-1}\frac{d\eta}{d\xi}+\Pi_m\eta=0$$

genügt. Hieraus folgt, sobald $m\geqq 2$ ist (der Fall $m=1$ wird später besonders untersucht werden):

$$(4.)\quad\begin{cases}\frac{\mathfrak{G}}{H_m}+P_1Y_{m-1}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2}{H_m}+\cdots+P_m g\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{m+1}}{\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}-\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial\eta}}\\ \qquad=\Pi_1\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}+\Pi_2\frac{d^{m-2}\eta}{d\xi^{m-2}}+\cdots+\Pi_{m-1}\frac{d\eta}{d\xi}+\Pi_m\eta.\end{cases}$$

Diese Gleichung aber muss identisch bestehen, wenn jeder der $m+1$ Grössen: ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi},\ldots,\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}$ willkürliche Werthe beigelegt werden. Denn man darf bei einer Differentialgleichung $m$ter Ordnung diesen Grössen beliebige Anfangswerthe geben, und dadurch sind dann $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$, $\frac{d^{m+1}\eta}{d\xi^{m+1}},\ldots$ für den Anfangswerth von ξ und damit η selbst als Function von ξ nach dem *Taylor*schen Satze bestimmt; die Convergenz dieser Entwicklung ist durch geeignete Beschränkung der Veränderlichkeit jener Anfangswerthe zu erreichen.

In der Identität (4.) sind aber die Coefficienten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ganz willkürlich. Sie kann daher nur bestehen, wenn die $m+1$ Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{G}}{H_m},\quad Y_{m-1}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{H_m},\quad \ldots,\quad P_{m-1}Y_1\cdot\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{2m-2}}{H_m},$$

$$P_m\cdot g\cdot\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{2m-1}}{H_m}$$

sämmtlich lineare homogene Functionen von η, $\frac{d\eta}{d\xi}$, ..., $\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}$ sind. Der letzte dieser Ausdrücke ist gleich

$$P_m(f(\xi,\,\eta))g(\xi,\,\eta)\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{m+1}}{\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \eta}-\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta}};$$

enthält also nur ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$. Er soll linear in $\frac{d\eta}{d\xi}$ sein. Das ist nur möglich, wenn identisch

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=0,$$

wenn also x eine Function von ξ allein ist. Hat man aber

$$x=f(\xi),$$

so wird der betrachtete Ausdruck gleich

$$P_m(f(\xi))\cdot g(\xi,\,\eta)\cdot\frac{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^m}{\frac{\partial g}{\partial \eta}},$$

und er muss daher eine lineare homogene Function von η allein sein.

Weiter ist

$$P_{m-2}.Y_2\cdot\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{2m-4}}{H_m}$$

einer der $m+1$ Ausdrücke. Setzt man für Y_2 und H_m ihre Werthe ein und berücksichtigt dabei die Gleichung $x=f(\xi)$, so erhält man

$$P_{m-2}\cdot\frac{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^{m-3}}{\frac{\partial g}{\partial \eta}}\left\{\frac{df}{d\xi}\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{df}{d\xi}\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{df}{d\xi}\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\right)\frac{d\eta}{d\xi}-\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\right\};$$

für $m=2$ ist $P_{m-2}=1$ zu setzen, und der erste Term in der Klammer

fortzulassen. Dieser Ausdruck ist jedenfalls linear in $\frac{d\eta}{d\xi}$, folglich ist

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0,$$

also $g(\xi, \eta) = g_1(\xi)\eta + g_2(\xi)$. Nun war aber $\frac{g(\xi, \eta)}{\frac{\partial g}{\partial \eta}}$ eine lineare homogene Function von η. Folglich ist $g_2(\xi)$ identisch gleich Null und

$$g(\xi, \eta) = g(\xi).\eta.$$

Damit aber ist bewiesen, dass die gesuchten Transformationen nur:

$$\text{(T.)} \qquad x = f(\xi), \quad y = g(\xi).\eta$$

sein können. Diese Transformationen leisten aber auch wirklich die Ueberführung jeder linearen homogenen Differentialgleichung $m$ter Ordnung in eine Gleichung derselben Art.

Es bleibt übrig, den Fall $m = 1$ zu behandeln. Dass hier eine besondere Untersuchung erforderlich ist, findet darin seine Begründung, dass für $m = 1$ der eben bewiesene Satz keine Gültigkeit besitzt.

Setzt man

$$\log y = y_1, \quad \log \eta = \eta_1,$$

so handelt es sich darum, die Transformationen:

$$x = f_1(\xi, \eta_1), \quad y_1 = g_1(\xi, \eta_1)$$

zu finden, durch welche

$$\text{(8.)} \qquad \frac{dy_1}{dx} + P_1(x) = 0,$$

wie auch P_1 gewählt sei, in

$$\text{(9.)} \qquad \frac{d\eta_1}{d\xi} + \Pi_1(\xi) = 0$$

übergeht. Aus (8.) erhält man aber durch jene Transformation:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} + \frac{P_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial g_1}{\partial \xi}}{P_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}} = 0.$$

Soll diese Gleichung mit (9.) gleichbedeutend sein, so muss die partielle Ableitung nach η_1 des zweiten Terms links identisch verschwinden; es muss also, und zwar für beliebige $P_1(x)$

$$\left(\frac{dP_1}{dx}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial f_1}{\partial \xi}+P_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi\partial \eta_1}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial \xi\partial \eta_1}\right)\left(P_1\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}+\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}\right)$$
$$-\left(\frac{dP_1}{dx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}\right)^2+P_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta_1^2}\right)\left(P_1\frac{\partial f_1}{\partial \xi}+\frac{\partial g_1}{\partial \xi}\right) = 0$$

identisch bestehen. Dies ist nur möglich, wenn in der entwickelten Gleichung der Coefficient von $\frac{dP_1}{dx}$ identisch verschwindet, also ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi}\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}-\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial g_1}{\partial \xi}\right) = 0,$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} = 0.$$

Mithin ist:

$$x = f_1(\xi), \quad y = g_1(\xi, \eta_1).$$

Die Anwendung dieser Transformation auf

$$\frac{dy_1}{dx}+P_1(x) = 0$$

ergiebt:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi}+\frac{P_1(f_1)f_1'(\xi)+\frac{\partial g_1}{\partial \xi}}{\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}} = 0.$$

Damit der zweite Term bei willkürlichem P_1 eine Function von ξ allein ist, muss zunächst $\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}$ und daher dann auch $\frac{\partial g_1}{\partial \xi}$ eine Function von ξ allein sein. Die erste Forderung besagt, dass g_1 eine lineare Function von η_1 ist, die zweite, dass der Coefficient von η_1 in g_1 unabhängig von ξ ist. Mithin ist nothwendig:

$$x = f(\xi), \quad y_1 = \lambda\eta_1+g_1(\xi),$$

wo λ eine Constante bedeutet. Hieraus aber ergiebt sich in den ursprünglichen Veränderlichen:

$$(10.) \qquad x = f(\xi), \quad y = g(\xi).\eta^\lambda.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Transformation das Gewünschte leistet, denn sie führt

$$\frac{dy}{dx}+P_1(x)y = 0$$

über in:

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\left[\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}+\frac{1}{\lambda}P_1(f(\xi)).f'(\xi)\right]\eta = 0.$$

Damit ist auch der Fall $m=1$ vollständig erledigt.

II.

Dass die Transformationen:

$$(T.)\qquad x=f(\xi),\quad y=g(\xi).\eta$$

jede lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung in eine Gleichung derselben Art überführen, beruht wesentlich darauf, dass jede der Ableitungen von y nach x eine homogene lineare Function von η und seinen Ableitungen nach ξ ist, wobei der Ausdruck für $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ nur η, $\frac{d\eta}{d\xi}, \dots, \frac{d^\mu\eta}{d\xi^\mu}$ enthält. Hieraus aber folgt, *dass überhaupt jede in* y, $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}$ *homogene Differentialgleichung vermöge der Transformation* (T.) *in eine homogene Differentialgleichung derselben Dimension übergeführt wird.*

In diesem Abschnitte soll nun die Transformation der algebraischen homogenen Differentialgleichungen $m$ter Ordnung mit allgemeinen Coefficienten betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass jede Transformation

$$x=f(\xi,\ \eta),\quad y=g(\xi,\ \eta),$$

welche eine solche Differentialgleichung in eine Gleichung derselben Art überführt, sobald $m\geqq 2$ ist, wieder nur die Form:

$$(T.)\qquad x=f(\xi),\quad y=g(\xi).\eta$$

haben kann. ***Hiermit aber ist das Fundament gewonnen, auf welchem sich erst eine rationelle Theorie der Differentialinvarianten algebraischer homogener Differentialgleichungen aufbauen lässt.***

Jede algebraische homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung lässt sich auf die Form bringen:

$$(11.)\qquad A(y)=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m} P_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m}(x).y^{\alpha_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\alpha_m}=0,$$
$$(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha)$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ positive ganze Zahlen, Null eingeschlossen, bedeuten und die positive ganze Zahl α als Dimension von $A(y)$ zu bezeichnen ist.

Gesucht werden dann alle Transformationen:

$$x = f(\xi, \eta), \quad y = g(\xi, \eta),$$

vermöge deren $A(y) = 0$, wie beschaffen auch die Coefficienten $P_{a_0, a_1, \dots, a_m}$ seien, in eine Gleichung derselben Form:

$$(12.) \quad A(\eta) = \sum_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_m = a)}} \Pi_{a_0, a_1, \dots, a_m}(\xi) . \eta^{a_0} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{d^m\eta}{d\xi^m}\right)^{a_m} = 0$$

übergeht.

Wird in $A(y) = 0$, wo $m \geqq 2$ sein möge, eingesetzt:

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{Y_\mu}{\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{2\mu - 1}}, \qquad (\mu = 1, 2, 3, \dots, m)$$

so ergiebt sich nach Multiplication mit $\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{a(2m-1)}$ eine Differentialgleichung für η, deren linke Seite eine ganze rationale Function von η, $\frac{d\eta}{d\xi}, \dots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ ist:

$$\sum_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_m = a)}} P_{a_0, a_1, \dots, a_m}(x) . g^{a_0} Y_1^{a_1} \dots Y_m^{a_m} . \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{a(2m-1) - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu (2\mu - 1)} = 0;$$

dass der Exponent von $\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}$, der zur Abkürzung mit $\varkappa_{a_0, a_1, \dots, a_m}$ bezeichnet werden soll, für kein Glied negativ ist, folgt aus der Identität:

$$\varkappa_{a_0, a_1, \dots, a_m} = a_0(2m-1) + 2am\left(1 - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\mu}{m} \cdot \frac{a_\mu}{a}\right).$$

Die transformirte Differentialgleichung ist in $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ vom Grade a, und zwar tritt $\left(\frac{d^m\eta}{d\xi^m}\right)^a$ auf multiplicirt mit:

$$P_{0, 0, \dots, 0, a} . H_m^a.$$

Da die Coefficienten von $A(y)$ beliebig sein sollten, darf man

$$P_{0, 0, \dots, 0, a} = 1$$

annehmen und erhält dann:

$$(13.) \quad \left(\frac{d^m\eta}{d\xi^m}\right)^a + \frac{\mathfrak{G}}{H_m^a} + \sum_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_m = a)}}' P_{a_0, a_1, \dots, a_m} \cdot \frac{1}{H_m^a} g^{a_0} Y_1^{a_1} \dots Y_m^{a_m} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{\varkappa_{a_0, a_1, \dots, a_m}} = 0;$$

der Strich bei der Summe bedeutet, dass das Werthsystem

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1} = 0, \quad \alpha_m = \alpha$$

auszuschliessen ist; ferner ist

$$\mathfrak{G} = Y_m^\alpha - H_m^\alpha \left(\frac{d^m\eta}{d\xi^m}\right)^\alpha$$

eine ganze rationale Function von $\frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$, welche in $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ höchstens vom Grade $\alpha-1$ ist.

Genügt jetzt die Function η auch der Gleichung $A(\eta) = 0$, so giebt es stets zwischen $\eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ eine homogene Relation der Dimension α, welche in Bezug auf $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ höchstens vom Grade $\alpha-1$ ist. Entweder ist nämlich schon $A(\eta) = 0$ eine solche Relation oder sie folgt durch Vergleichung von (13.) und $A(\eta) = 0$. Es lässt sich aber zeigen, dass eine solche Relation identisch bestehen muss, wenn in ihr $\xi, \frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ als willkürliche Grössen angesehen werden. Hieraus folgt, dass die erste Möglichkeit gar nicht eintreten kann, vielmehr $\Pi_{0,0,\ldots,0,\alpha}$ von Null verschieden sein muss und also, unbeschadet der Allgemeinheit, von vornherein gleich Eins gesetzt werden darf.

Legt man nämlich den Grössen $\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}}$ willkürliche Anfangswerthe bei, so ergiebt sich aus (13.) $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ als algebraische Function dieser Anfangswerthe, und zwar ergeben sich α verschiedene Werthe, wenn nicht etwa die Discriminante dieser Gleichung für $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ identisch verschwindet. Dass dies eintritt, lässt sich aber durch geeignete Wahl der Coefficienten $P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ verhindern. Dann aber muss jede algebraische Gleichung zwischen $\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$, welche $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ höchstens im Grade $\alpha-1$ enthält, identisch in $\frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ bestehen. Aus der Vergleichung von (12.) und (13.) geht daher eine Relation

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{G}}{H_m^\alpha} + \sum\limits_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}' P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(f(\xi, \eta)) \cdot \dfrac{1}{H_m^\alpha} g^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} \ldots Y_m^{\alpha_m} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{d\eta}{d\xi} + \dfrac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{\varkappa_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}} \\ \qquad = \sum\limits_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}' \Pi_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(\xi).\eta^{\alpha_0}\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{d^m\eta}{d\xi^m}\right)^{\alpha_m} \end{cases}$$

hervor, welche identisch in $\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \ldots, \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ besteht.

Da die Coefficienten $P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ ganz willkürlich gewählt werden dürfen, kann diese Identität nur bestehen, wenn die Ausdrücke

$$P_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(f(\xi,\,\eta))\,\frac{1}{H_m^\alpha}\,g^{\alpha_0}Y_1^{\alpha_1}\ldots Y_m^{\alpha_m}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{\varkappa_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m}}$$

$$(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha;\quad \alpha_0=0,\,\ldots,\,\alpha_{m-1}=0,\ \alpha_m=\alpha\ \text{ausgeschlossen})$$

homogene Functionen der Dimension α in $\eta,\ \frac{d\eta}{d\xi},\ \ldots,\ \frac{d^m\eta}{d\xi^m}$ sind. Wendet man dies an für

$$\alpha_0=\alpha,\quad \alpha_1=0,\quad \ldots,\quad \alpha_m=0,$$

so muss

$$P_{\alpha,0,0,\ldots,0}(f(\xi,\,\eta)).g^\alpha(\xi,\,\eta)\cdot\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{\alpha(m+1)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\eta}-\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^\alpha}$$

eine Function αten Grades von $\frac{d\eta}{d\xi}$ sein. Das ist aber nur möglich, wenn identisch

$$\frac{\partial f}{\partial\eta}=0,$$

und daher x eine Function von ξ allein ist. Ist nun $x=f(\xi)$, so wird der betrachtete Ausdruck gleich

$$P_{\alpha,0,0,\ldots,0}(f(\xi)).g^\alpha(\xi,\,\eta)\cdot\frac{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^{\alpha m}}{\left(\frac{\partial g}{\partial\eta}\right)^\alpha}$$

und muss daher eine homogene Function der Dimension α von η allein sein.

Weiter sei

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=\alpha,\quad \alpha_3=0,\quad \ldots,\quad \alpha_m=0.$$

Dann erkennt man, dass

$$\frac{1}{H_m^\alpha}\,Y_2^\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^{\alpha(2m-4)}$$

eine homogene Function der Dimension α von $\eta,\ \frac{d\eta}{d\xi}$ und $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ sein muss. Dieser Ausdruck enthält aber das Glied:

$$\frac{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^{\alpha(m-2)}}{\left(\frac{\partial g}{\partial\eta}\right)^\alpha}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}\right)^\alpha\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{2\alpha},$$

folglich ist

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0,$$

und daher $g(\xi, \eta) = g_1(\xi_1).\eta + g_2(\xi)$. Da aber $\left(\frac{g}{\frac{\partial g}{\partial \eta}}\right)^\alpha$ eine homogene Function der Dimension α von η allein, also auch $\frac{g}{\frac{\partial g}{\partial \eta}}$ eine lineare homogene Function von η ist, so folgt, dass

$$g(\xi, \eta) = g(\xi).\eta$$

sein muss, womit der verlangte Beweis vollständig erbracht ist.

Es bleibt übrig, die Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Eine solche Gleichung:

$$\sum_{\substack{\alpha_0, \alpha_1 \\ (\alpha_0+\alpha_1 = \alpha)}} P_{\alpha_0 \alpha_1}(x).y^{\alpha_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha_1} = 0 \qquad (P_{0,\alpha} = 1)$$

lässt sich stets auf die Form

$$(16.) \qquad \prod_{\alpha_0=1}^{\alpha}\left(\frac{dy}{dx} + P^{(\alpha_0)}(x).y\right) = 0$$

bringen. Hieraus geht hervor, dass die für $\alpha = 1$ gefundenen Transformationen:

$$x = f(\xi), \quad y = g(\xi).\eta^\lambda$$

auch für den allgemeinen Fall die Eigenschaft haben, wieder eine Gleichung derselben Art zu liefern. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass nur diese Transformationen die verlangte Eigenschaft besitzen, jede Gleichung (16.) in eine Gleichung

$$(17.) \qquad \prod_{\alpha_0=1}^{\alpha}\left(\frac{d\eta}{d\xi} + \Pi^{(\alpha_0)}(\xi).\eta\right) = 0$$

überzuführen.

Setzt man $\log y = y_1$, $\log \eta = \eta_1$, so handelt es sich um die Substitutionen:

$$x = f_1(\xi, \eta_1), \quad y_1 = g_1(\xi, \eta_1),$$

welche

$$(18.) \qquad \prod_{\alpha_0=1}^{\alpha}\left(\frac{dy_1}{dx} + P^{(\alpha_0)}(x)\right) = 0$$

überführen in:

$$\prod_{a_0=1}^{a}\left(\frac{d\eta_1}{d\xi}+\Pi^{(a_0)}(\xi)\right) = 0. \tag{19.}$$

Aus (18.) erhält man aber durch die Substitution:

$$\prod_{a_0=1}^{a}\left(\frac{d\eta_1}{d\xi}+\frac{p^{(a_0)}\frac{\partial f_1}{\partial \xi}+\frac{\partial g_1}{\partial \xi}}{p^{(a_0)}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}+\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}}\right) = 0. \tag{20.}$$

Legt man jetzt den Grössen ξ und η willkürliche Anfangswerthe bei, so zeigt die Gleichung (19.), dass zu diesen m Werthe der Grösse $\frac{d\eta_1}{d\xi}$ gehören, die alle von dem Anfangswerthe der Grösse η_1 unabhängig sind. Aus der Gleichung (20.) ergeben sich auch m Werthe von $\frac{d\eta_1}{d\xi}$. Da jeder dieser Werthe der Gleichung (19.) genügen soll, so folgt, dass die Ausdrücke:

$$\frac{p^{(a_0)}\frac{\partial f_1}{\partial \xi}+\frac{\partial g_1}{\partial \xi}}{p^{(a_0)}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}+\frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}} \qquad (a_0 = 1, 2, 3, \ldots, a)$$

Functionen von ξ allein sind. Dann ist aber ohne weiteres der für $a = 1$ gegebene Beweis anwendbar, womit die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertigt ist.

Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension.

(Von Herrn *Konrad Zindler* in Graz.)

§ 1.

Einleitung.

Zu linearen geometrischen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gelangen wir durch Iterirung des Verfahrens der Bildung projectiver Punktreihen. Herr *Reye* hat (dieses Journal Bd. 104) bewiesen, dass sämmtliche Ebenenbüschel erster Ordnung des Raumes, welche zu einem derselben projectiv sind, eine siebenstufige *lineare* Mannigfaltigkeit (Mf.) bilden. Dual bilden die geraden Punktreihen des Raumes, welche zu irgend einer projectiv sind, eine siebenstufige lineare Mf. $M_7^{(1)}$, welche wir der Iterirung zu Grunde legen wollen. In ihr lassen sich die linearen einstufigen Gebilde*) R_1 wieder projectiv beziehen, weil sie sich auf die gewöhnliche Punktreihe (i. a. durch Schnitt der Träger-Regelschaar mit einem Leitstrahl) so abbilden lassen, dass verschiedene Abbildungen desselben R_1 projectiv sind, worauf man nur die Abbildungen verschiedener R_1 projectiv zu beziehen braucht. Wir können also in $M_7^{(1)}$ die Mf. $M^{(2)}$ auffassen, welche aus allen Gebilden R_1 besteht, die zu einem derselben projectiv sind, und es lässt sich zeigen, dass $M^{(2)}$ *abermals linear* ist.

Hierzu ist vor allem zu fragen, ob je zwei projective R_1 in $M_7^{(1)}$ gerade so eine einstufige Mf. S_1 von lauter R_1 definiren, wie je zwei ge-

*) Grosse lateinische Buchstaben bedeuten hier stets *lineare* Mfn., deren unterer Index ihre Dimension angiebt; der Index Null bezeichnet eins der Elemente selbst, aus denen die betreffende Mf. besteht. Wir werden diese Elemente in der üblichen Weise auch „Punkte", die linearen einstufigen Mfn. der Elemente „Gerade", die zweistufigen „Ebenen", die mehrstufigen „Räume" nennen, ohne dabei an etwas anderes denken zu wollen, als an solche linearen geometrischen Mfn., die in unserem Raume vorfindlich sind.

wöhnliche projective Punktreihen G_1 im Punktraume $M_3^{(0)}$ eine Mf. R_1 von lauter G_1 definiren; da die analoge Untersuchung im $M_3^{(0)}$ nur mit den Mitteln der Geometrie der Lage geführt ist, so lässt sie sich auf jede lineare Mf., daher auch auf $M_7^{(1)}$ übertragen. Ferner wird man zu untersuchen haben, ob drei projective R_1 von $M_7^{(1)}$, welche i. a. erst in einem R_5 von $M_7^{(1)}$ enthalten sind*), eine zweistufige Mf. von lauter R_1 definiren, welche die wesentlichen Eigenschaften der Linearität besitzt. Auch der Fall, dass die drei projectiven Reihen R_1 in einem R_4 enthalten sind, wird zu betrachten sein, während der noch speciellere Fall, dass sie in einem R_3 liegen, durch § 2 genannter Abhandlung Herrn *Reyes* erledigt ist. Weiter als bis zur Erzeugung der zweistufigen linearen Mfn. in $M^{(2)}$ braucht man nicht zu gehen, um zu beweisen, dass ganz $M^{(2)}$, wievielstufig es auch sei, linear ist**).

Falls sich die „geraden" Elementenreihen in $M^{(2)}$ auf die in $M^{(1)}$ (und hiermit auch in $M^{(0)}$) nach irgend einer Regel so abbilden lassen, dass je zwei nach dieser Regel erhaltbare Abbildungen, von denen jede einzelne gegenseitig eindeutig sein soll, projectiv sind, so kann vermöge dieser Eigenschaft zwischen den Geraden in $M^{(2)}$ (und hiermit auch zwischen den mehrstufigen linearen Mfn. in $M^{(2)}$) eine projective Beziehung definirt werden, und es sind die Bedingungen zur abermaligen Wiederholung obiger Betrachtungen erfüllt, u. s. w.

Wir müssen uns also vor allem mit dem Erzeugniss dreier projectiven geraden Punktreihen in R_5 beschäftigen, nehmen aber hierbei einen etwas anderen Ausgangspunkt, um hervortreten zu lassen, dass dieses Erzeugniss auch unmittelbar durch reine Incidenzrelationen (ähnlich wie die Regelschaar in R_3) unabhängig vom Projectivitätsbegriff definirt werden kann.

---

*) Ueber die bekannten Schnitt- und Verbindungsgesetze für lineare Mfn. cf. *Veronese* (Math. Ann. XIX, p. 163 f.) und *Schubert* (Math. Ann. XXVI, p. 28 f.).

**) Ueber diesen nach den Methoden von *E. Kötter* (Grundzüge einer rein geometrischen Theorie etc., § 81) und *Veronese* (Fondamenti etc., namentlich S. 458 f.) zu beweisenden Satz cf. „Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten etc." § 1 (Wiener Sitzungsber. CI, 1892), woselbst ich auf dem nicht so einfachen Wege wiederholter Complexbildung zu linearen Mfn. unbeschränkter Dimension gelangte; über die principielle Bedeutung derselben für die synthetische Geometrie des Punktraumes cf. ebenda Einleitung und § 15.

§ 2.

Das Erzeugnis dreier projectiver gerader Punktreihen in R_5*).

Wir setzen irgend eine lineare, mindestens 5-stufige Mf. gewisser Elemente als gegeben voraus und nehmen in einem linearen Raume R_5 derselben drei „Ebenen" P_2, Q_2, R_2 an, von denen keine zwei einen „Punkt" gemein haben. Durch jeden Punkt P_0 einer der Ebenen P_2 lässt sich eine und nur eine Gerade legen, welche die beiden anderen schneidet. Sie ist nämlich der Schnitt der beiden R_3, welche P_0 mit je einer der anderen Ebenen verbinden; also:

2) *Durch drei Ebenen, von denen keine die andere schneidet, ist in R_5 eine doppeltunendliche Mf. $\mathfrak{G}_5$ von Geraden definirt, welche alle drei Ebenen schneiden. Keine zwei der Geraden schneiden sich, und durch jeden Punkt jeder der Ebenen geht eine derselben. Fasst man aus den Geraden von $\mathfrak{G}_5$ diejenigen heraus, welche durch alle Punkte einer Geraden in P_2 gehen, so bilden dieselben eine Regelschaar, welche von Q_2 und R_2 in je einem Strahl ihrer Leitschaar geschnitten wird.*

Fasst man nämlich zwei Gerade G_1 und G_1' von $\mathfrak{G}_5$ heraus, welche die Ebenen beziehungsweise in den Punkten P_0, Q_0, R_0; P_0', Q_0', R_0' schneiden mögen, so liegen die drei Geraden P_0P_0', Q_0Q_0', R_0R_0' in demselben durch G_1 und G_1' bestimmten R_3 und bestimmen daher eine Regelschaar, deren sämmtliche Strahlen zu $\mathfrak{G}_5$ gehören. Also auch durch je zwei Gerade von $\mathfrak{G}_5$ wird eine Regelschaar bestimmt, welche ganz zu $\mathfrak{G}_5$ gehört.

Wir nehmen jetzt in R_5 vier Gerade A_1, B_1, C_1, D_1 an, von denen keine den durch zwei der anderen bestimmten R_3 schneide, und wollen alle Ebenen in R_5 aufsuchen, welche alle vier Geraden schneiden. Die zwei Räume dritter Dimension, welche durch die beiden Paare A_1, B_1 und C_1, D_1 bestimmt werden, schneiden sich in einer Geraden F_1; ebenso liefern die Paare A_1, C_1 und B_1, D_1 die Gerade G_1, endlich die Paare A_1, D_1 und B_1, C_1 die Gerade H_1. Die Geraden F_1, G_1, H_1 können keine der vier gegebenen schneiden. Durch jeden Punkt von F_1 können wir, weil er mit A_1 und B_1 in demselben R_3 liegt, eine und nur eine Gerade legen, welche A_1 und B_1 schneidet, ebenso eine einzige Gerade, welche C_1 und D_1 schneidet. Die Verbindungsebene E_2 dieser beiden Geraden schneidet alle vier gege-

*) Das Erzeugniss $\mathfrak{P}_5$, zu welchem wir gelangen, scheint zuerst von Herrn *Segre* (Sulle varietà normali a tre dim. etc., Torino Atti XXI) betrachtet worden zu sein.

benen Geraden. Die Punkte von G_1 oder H_1 hätten dieselbe Ebenenschaar geliefert, wie die von F_1. Also:

3) *Durch vier Gerade in R_5, von denen keine den Raum zweier anderen schneidet, ist eine einfach unendliche Mf.* $\mathfrak{E}_5$ *von Ebenen definirt, welche sämmtliche vier Geraden schneiden. Keine zwei der Ebenen schneiden sich, und durch jeden Punkt jeder der vier Geraden geht eine dieser Ebenen.*

Es sei durch vier Gerade eine Ebenenschaar $\mathfrak{E}_5$ definirt; wir fassen drei beliebige Ebenen derselben heraus und wollen zeigen:

4) *Durch ein solches Ebenentripel wird nach* 2) *immer ein und dieselbe Geradenschaar* $\mathfrak{G}_5$ *definirt. Durch beliebige vier Gerade der letzteren, von denen keine drei in derselben Regelschaar liegen, wird nach* 3) *immer die ursprüngliche Ebenenschaar definirt.*

Aus der Construction einer Ebenenschaar $\mathfrak{E}_5$, welche durch A_1, B_1, C_1, D_1 definirt sei, mittelst der Geraden F_1 folgt, dass die vier gegebenen Geraden, sowie auch F_1, G_1 und H_1, durch die Ebenenschaar projectiv auf einander bezogen sind. Wir fassen drei Ebenen $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ der Schaar heraus, welche die vier Geraden in den Punkten $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, ..., $D_0^{(3)}$ schneiden mögen, und definiren durch diese drei Ebenen eine Geradenschaar $\mathfrak{G}_5$. Durch die Gerade $A_0^{(1)}B_0^{(1)}$ ist nach 2) eine in $\mathfrak{G}_5$ enthaltene Regelschaar $\mathfrak{R}$ bestimmt. Deren Strahlen schneiden auch alle übrigen Ebenen von $\mathfrak{E}_5$; nämlich drei derselben, A_1, B_1, und F_1 schneiden jede Ebene der Schaar in drei Punkten einer Geraden, welche also Leitstrahl von $\mathfrak{R}$ ist; analog für die übrigen durch $A_0^{(1)}C_0^{(1)}$ etc. definirten Regelschaaren. Ein beliebiger Strahl S_1 von $\mathfrak{G}_5$ schneide $E^{(1)}$ in S_0. Dann können wir durch S_0 in $E^{(1)}$ eine Gerade legen, welche zwei der Seiten des in $E^{(1)}$ liegenden vollständigen Vierecks $A_0^{(1)}B_0^{(1)}C_0^{(1)}D_0^{(1)}$ in zwei verschiedenen Punkten U_0, V_0 schneidet. Die durch diese Punkte gehenden Strahlen U_1, V_1 von $\mathfrak{G}_5$ bestimmen, weil sie durch $\mathfrak{E}_5$ projectiv bezogen sind, eine Regelschaar $\mathfrak{S}$, von welcher in jeder Ebene von $\mathfrak{E}_5$ ein Strahl liegt; die Leitschaar von $\mathfrak{S}$ gehört $\mathfrak{G}_5$ vollständig an, und jeder Strahl derselben, daher auch S_1, schneidet alle Ebenen von $\mathfrak{E}_5$. $\mathfrak{G}_5$ ist also nicht nur für die drei definirenden Ebenen, sondern auch für jedes andere Ebenentripel aus $\mathfrak{E}_5$ das System sämmtlicher schneidender Geraden. Drei Gerade von $\mathfrak{G}_5$, die nicht derselben Regelschaar angehören, haben die Eigenschaft, dass der Raum R_3 zweier derselben, in welchem die Regelschaar $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}_5$ liegt, mit der dritten keinen Punkt gemein hat. Aus dem bisherigen ergiebt sich 4) und zugleich:

5) $\mathfrak{E}_5$ *kann auch durch drei projective Punktreihen, $\mathfrak{G}_5$ durch zwei collineare Ebenen erzeugt werden. Alle Ebenen von $\mathfrak{E}_5$ sind durch das zugehörige $\mathfrak{G}_5$ collinear auf einander bezogen, und umgekehrt alle Punktreihen der Geradenschaar projectiv durch die Ebenenschaar. Fassen wir die Gesammtheit der Punkte auf, welche in den Elementen eines $\mathfrak{E}_5$ oder der damit nach* 4) *verbundenen $\mathfrak{G}_5$ liegen, so bilden dieselben eine dreifache Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_5$ in R_5 von der dritten Ordnung.*

Dass $\mathfrak{P}_5$ von der dritten Ordnung ist, ergiebt sich durch Betrachtung seiner Punkte, die in einem S_3 von R_5 liegen. $\mathfrak{E}_5$ und somit $\mathfrak{P}_5$ wird nämlich dual auch erzeugt durch drei projective Büschel (R_3, R_5)*) als Gesammtheit der Schnittebenen je dreier entsprechender R_4 der Büschel (auch durch zwei collineare Bündel (R_2, R_5) als Gesammtheit der Punkte aller Schnittgeraden je zweier entsprechender R_3 der Bündel). S_3 wird nun i. a. von den drei projectiven Büscheln (R_3, R_5) in drei projectiven Ebenenbüscheln geschnitten. Die in einem S_3 liegenden Punkte von $\mathfrak{P}_5$ bilden daher i. a. eine (i. a. eigentliche, eventuell zerfallende) Raumcurve dritter Ordnung, in speciellen Fällen, wie aus dem Früheren hervorgeht, eine Regelfläche zweiter Ordnung oder eine Ebene und eine Gerade.

5b) Wenn also eine Ebene sämmtliche Ebenen eines $\mathfrak{E}_5$ schneidet, so kann dies entweder in den Punkten einer Geraden oder in den Punkten eines Kegelschnittes geschehen, das letztere aber nur dann, wenn die Ebene einem Raume S_3 angehört, der eine ganze Regelfläche von $\mathfrak{P}_5$ enthält.

Wenn wir jetzt $\mathfrak{G}_5$ nicht bloss als zweistufige Geradenmannigfaltigkeit auffassen, sondern als zweistufige Mf. projectiver Punktreihen, so folgt aus den bisherigen Sätzen:

6) *Das Gebilde $\mathfrak{G}_5$ wird auch erhalten, indem man alle Individuen einer Regelschaar projectiver Punktreihen mit einer dritten projectiven Punktreihe, welche den Raum der Regelschaar nicht schneidet, durch Regelschaaren projectiver Punktreihen verbindet. Es ist in dieser Weise durch je drei nicht derselben Regelschaar angehörige seiner projectiven Reihen ebenso bestimmt, wie durch die drei ursprünglichen. Jede Regelschaar projectiver Reihen in R_5, welche zwei Reihen mit $\mathfrak{G}_5$ gemein hat, gehört ganz zu $\mathfrak{G}_5$. Je zwei*

*) Unter einem Bündel (R_k, R_n), wobei R_k in R_n liegt, sind alle durch R_k gehenden linearen Räume höherer Dimension, die in R_n liegen, zu verstehen. Für $k = n-2$ besteht (R_k, R_n) aus einer einfachen Mf. von R_{n-1}; wir nennen es deshalb diesfalls in üblicher Weise auch Büschel.

Regelschaaren projectiver Reihen von $\mathfrak{G}_5$ haben eine Reihe gemein. $\mathfrak{G}_5$ ist also eine lineare zweistufige Mf. projectiver Punktreihen.

Wir setzen eine Ebenenschaar $\mathfrak{E}_5$ voraus und einen Punkt C_0 von R_5, welcher keiner Ebene der Schaar angehört. Wenn wir drei beliebige Ebenen E, E', E'' der Schaar herausfassen, so giebt es durch C_0 eine einzige Gerade, welche E und E' schneidet, ebenso eine, welche E' und E'' und eine, welche E'' und E schneidet. Diese drei Geraden bestimmen einen Raum S_3 durch C_0, welcher die drei Ebenen E, E', E'' in je einer Geraden schneidet. Die durch letztere drei Geraden als Leitgerade bestimmte Regelschaar $\mathfrak{R}$ gehört dem $\mathfrak{G}_5$ an, welches mit $\mathfrak{E}_5$ nach 4) verbunden ist. Für keinen Punkt C_0 ausserhalb $\mathfrak{P}_5$ kann diese stets eindeutige Bestimmung des Raumes S_3 versagen. Von der Leitschaar der Regelschaar $\mathfrak{R}$ liegt in jeder Ebene von $\mathfrak{E}_5$ ein Strahl. Sucht man also den Strahl durch C_0, welcher ein *beliebiges* Paar von Ebenen der Schaar schneidet, so liegt er stets in S_3. S_3 ist zugleich der einzige Raum dritter Dimension durch C_0, welcher von $\mathfrak{P}_5$ eine ganze Regelfläche zweiter Ordnung enthält. Daher:

7) *Alle Bisecanten von $\mathfrak{P}_5$, welche durch einen nicht zu $\mathfrak{P}_5$ gehörigen Punkt C_0 von R_5 gehen, sind in einem S_3 durch C_0 enthalten und füllen hier das Aeussere einer Kegelfläche zweiter Ordnung**).

§ 3.

Das Erzeugniss dreier projectiver gerader Punktreihen in R_4.

Wenn drei projective gerade Punktreihen $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ in einem R_4, aber keinem R_3 enthalten sind, so unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Keine Reihe schneidet die andere. Dann schneidet die Reihe $G^{(1)}$ den Raum der beiden anderen in einem Punkte $P_0^{(1)}$. $P_0^{(1)}$ und die zwei analogen Punkte $P_0^{(2)}$, $P_0^{(3)}$ liegen in einer Geraden, nämlich der Schnittgeraden S_1 der drei Verbindungsräume je zweier Reihen. Diese drei Punkte können nun

a) in allen drei Reihen einander entsprechen, b) oder nicht.

2) Zwei Reihen schneiden sich; die dritte hat mit der Ebene der beiden ersten keinen Punkt gemein. Der Schnittpunkt kann entweder

a) beiden Reihen *entsprechend* gemeinsam sein, b) oder nicht.

*) Ueber topologische Ausdrücke wie „das Aeussere“ cf. Wiener Sitzungsberichte a. a. O. § 5.

Falls die Elemente, aus denen R_4 besteht, eine im Ganzen höhere Mf. als R_4 bilden, was für unsere Anwendung stattfindet, kann man die drei Punktreihen $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ als Projection dreier Reihen $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, die einen R_5 bestimmen, auffassen*).

Wir projiciren also $\mathfrak{P}_5$ in einen R_4 aus einem Punkte C_0, der zunächst $\mathfrak{P}_5$ nicht angehören möge. Die Ebenenschaar $\mathfrak{E}_5$, als welche sich $\mathfrak{P}_5$ auffassen lässt, geht durch Projection in eine Ebenenschaar $\mathfrak{E}_4$ über, und die zugehörige Geradenschaar $\mathfrak{G}_5$ in eine Geradenschaar $\mathfrak{G}_4$. Auch jedes Element von $\mathfrak{G}_4$ schneidet jedes Element von $\mathfrak{E}_4$ und umgekehrt. Aber auch je zwei Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ schneiden sich in einem Punkte D_0. Diese Punkte bilden auf einer einzelnen Ebene eine Curve, im Ganzen eine Fläche. Jene Punkte in $\mathfrak{P}_4$ (so nennen wir $\mathfrak{E}_4$ oder $\mathfrak{G}_4$ als Punktmannigfaltigkeit), welche Projectionen zweier Punkte von $\mathfrak{P}_5$ sind, die „Doppelpunkte" von $\mathfrak{P}_4$, werden aus den durch C_0 gehenden Bisecanten von $\mathfrak{P}_5$ erhalten und sind mit den Schnittpunkten D_0 identisch. Daher folgt aus 7):

8) *Die Doppelpunkte von* $\mathfrak{P}_4$ füllen in jeder Ebene von $\mathfrak{E}_4$ eine Gerade und *sind im ganzen in einer Ebene* S_2 *enthalten, wo sie das Aeussere einer Curve zweiter Ordnung* $\mathfrak{C}^{(2)}$ *füllen.*

Von den Punkten einer Geraden von $\mathfrak{G}_4$ sind entweder alle (mit Ausnahme des Berührungspunktes mit $\mathfrak{C}^{(2)}$) Doppelpunkte oder keiner, je nachdem die Gerade in S_2 liegt, oder mit S_2 keinen Punkt gemein hat.

---

*) Z. B. wähle man im allgemeinsten Falle 1b) einen Punkt C_0 ausserhalb R_4. Dann hat die Ebene $(C_0, G^{(1)}) \equiv E_2$ mit dem Verbindungsraum $(G^{(2)}, G^{(3)})$ nur den Punkt $P_0^{(1)}$ gemein. Setzt man an Stelle von $G^{(1)}$ irgend eine weder durch C_0 noch durch $P_0^{(1)}$ gehende Gerade $H^{(1)}$ von E_2 und nimmt $H^{(2)}$ mit $G^{(2)}$, $H^{(3)}$ mit $G^{(3)}$ identisch, so hat man drei Punktreihen H, welche in keinem R_4 enthalten sind, und durch Projection aus C_0 die drei gegebenen liefern, und zwar liegt C_0 auf keiner Verbindungsebene V_2 dreier entsprechender Punkte $Q_0^{(1)}$, $Q_0^{(2)}$, $Q_0^{(3)}$ der drei Reihen H. Eine solche V_2 müsste E_2 in einer Geraden V_1 schneiden. Diese hätte mit der Geraden $Q_0^{(2)}Q_0^{(3)}$ einen Punkt gemein, welches nur der Punkt $P_0^{(1)}$ sein könnte; folglich müssten $Q_0^{(2)}$, $Q_0^{(3)}$ mit $P_0^{(2)}$, $P_0^{(3)}$ identisch sein, weil es durch $P_0^{(1)}$ nur eine Gerade giebt, welche $G^{(2)}$ und $G^{(3)}$ schneidet. Aber selbst wenn die Punkte $P_0^{(2)}$, $P_0^{(3)}$ entsprechende sind, ist doch im Falle 1b) der Punkt $P_0^{(1)}$ nicht entsprechend, folglich auch nicht der Schnittpunkt T_0 von V_1 und $H^{(1)}$, aus welchem $P_0^{(1)}$ durch Projection hervorgeht. Also die einzige Verbindungsebene V_2, welche E_2 überhaupt längs einer ganzen Geraden schneiden kann, geht nicht durch C_0. Dasselbe Ergebniss findet man im Falle 2b). Dagegen liegt in 1a) und 2a) das Projectionscentrum C_0 auf einer Verbindungsebene V_2.

Es fragt sich für unseren Zweck vor allem, ob es ausser den Geraden von $\mathfrak{G}_4$ noch andere geben kann, welche sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ schneiden. Verbinden wir eine solche H_1 mit C_0 durch eine Ebene E_2, so muss E_2 sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_5$ schneiden. Dies kann, wenn E_2 nicht in S_3 des Satzes 7) liegt, nur in Punkten einer Geraden von $\mathfrak{G}_5$ geschehen. Nur in der Ebene S_2 giebt es ausser der Geraden von $\mathfrak{G}_4$ noch solche, welche sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ schneiden. Die Ebene S_2 ist unabhängig von der Projection als Ort der Schnittpunkte D_0 charakterisirt. Also:

9) *Auch in R_4 ist durch drei projective Punktreihen eine zweifach unendliche Mf. $\mathfrak{G}_4$ projectiver Punktreihen definirt; deren Träger sind nämlich sämmtliche Gerade, welche alle Ebenen des durch die drei gegebenen Reihen bestimmten Ebenenbüschels $\mathfrak{E}_4$ schneiden; von den Geraden der Ebene S_2, welche den Ort der Schnittpunkte der Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ enthält, sind jedoch nur die Tangenten von $\mathfrak{C}^{(2)}$ (der Grenze des Ortes der Schnittpunkte) in die Mf. $\mathfrak{G}_4$ aufzunehmen. Die Geraden von $\mathfrak{G}_4$ werden durch $\mathfrak{E}_4$ projectiv bezogen, und da $\mathfrak{E}_4$ durch je drei andere Reihen von $\mathfrak{G}_4$, welche nicht derselben Regelschaar und nicht alle drei der Ebene S_2 angehören, ebenso bestimmt ist, wie durch die drei gegebenen, so ist $\mathfrak{G}_4$, als Mf. projectiver Punktreihen aufgefasst, linear.*

Schneiden sich zwei der ursprünglich gegebenen projectiven Reihen in einem nicht *entsprechend* gemeinsamen Punkte, so bestimmen sie die Ebene S_2. $\mathfrak{G}_4$ wird auch durch zwei collineare Ebenen E, E' in R_4 erzeugt.

In den Fällen 1b) und 2b) wird also dasselbe Gebilde erzeugt; ebenso wird in den Fällen 1a) und 2a), wie sich gleich zeigen wird, dasselbe Gebilde erzeugt. Man kann auch in diesen Fällen zwei der gegebenen Punktreihen durch eine Regelschaar projectiver Reihen verbinden und jede Reihe derselben mit der dritten, wodurch eine Mf. $\mathfrak{G}_4$ von ∞^2 Geraden definirt ist, die (cf. Anm. dieses Paragraphen) durch Projection von $\mathfrak{G}_5$ aus einem Punkt P_0 des zugehörigen $\mathfrak{P}_5$ erhalten werden kann. Der durch P_0 gehende Strahl C_1 von $\mathfrak{G}_5$ liefert als Schnitt mit dem R_4, in welchen projicirt wird, einen Punkt C_0, durch welchen sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ gehen, und die durch P_0 gehende Ebene E_2 von $\mathfrak{E}_5$ eine Gerade E_1, welche von sämmtlichen Reihen von $\mathfrak{G}_4$ geschnitten wird. Fasst man das Strahlbüschel (P_0, E_2) auf, so bestimmt jeder Strahl desselben nach 2) eine Regelschaar von $\mathfrak{G}_5$, und durch diese Regelschaaren wird $\mathfrak{G}_5$ erschöpft. Die projectiven Reihen der durch einen Strahl S_1 des Büschels bestimmten Regelschaar

werden in den R_4 so projicirt, dass sie sich alle in demselben Punkte (S_1, R_4) schneiden, welchen sie *entsprechend* gemein haben. Das Perspectivitätscentrum je zweier ist immer C_0. Die ∞^2 Reihen von $\mathfrak{G}_4$ lassen sich also diesfalls zu ∞^1 in ∞^1 Ebenen anordnen, welche alle durch C_0 und je einen Punkt von E_1 gehen. Alle Reihen derselben Ebene sind zu einander perspectiv mit gemeinsamem Centrum C_0. $\mathfrak{G}_5$ kann man sich durch drei seiner Reihen, welche nicht derselben Regelschaar angehören bestimmt denken. Je nachdem eine durch zwei derselben gehende Regelschaar C_1 enthält oder nicht, erhält man durch Projection den Fall 2a) oder 1a). Im Falle 2a) entspreche dem Schnittpunkt A_0 zweier Reihen der Punkt B_0 auf der dritten Reihe. Drei projective Reihen in R_4 definiren nun auch in den Fällen 1a) und 2a) ein System $\mathfrak{E}_4$ von Verbindungsebenen je dreier entsprechender Punkte, und alle Geraden von $\mathfrak{G}_4$ haben die Eigenschaft, sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_4$ und ausserdem die Gerade $P_0^{(1)}P_0^{(2)}P_0^{(3)}$, beziehungsweise A_0B_0 zu schneiden, welche beiden Geraden mit E_1 identisch sind. Aber auch umgekehrt: Eine Gerade H_1, welche jene Eigenschaft hat, gehört zu $\mathfrak{G}_4$. Denn ihre Verbindungsebene W_2 mit P_0 muss sämmtliche Ebenen von $\mathfrak{E}_5$ schneiden, und zwar die E_2 in einer ganzen Geraden. Dann muss sie aber alle übrigen Ebenen von $\mathfrak{E}_5$ ebenfalls in den Punkten einer Geraden schneiden. H_1 ist also die Projection eines Strahls von $\mathfrak{G}_5$. Da nun $\mathfrak{E}_4$ durch je drei andere Reihen von $\mathfrak{G}_4$, welche weder derselben Regelschaar noch alle drei derselben Ebene angehören, ebenso bestimmt ist, wie durch die drei gegebenen, so gilt dasselbe von $\mathfrak{G}_4$, welches jetzt unabhängig von der Projection durch $\mathfrak{E}_4$ allein bestimmt ist. Ueberhaupt besitzt $\mathfrak{G}_4$, als Mf. von ∞^2 projectiven Reihen aufgefasst, auch in den Fällen 1a) und 2a) die wesentlichen Eigenschaften der *Linearität* und kann in diesen Fällen auch durch zwei collineare ebene Felder bestimmt werden, die ihren Schnittpunkt *entsprechend* gemein haben.

§ 4.

Gewinnung linearer Mannigfaltigkeiten beliebig hoher Dimension; geometrische Deutung des Verfahrens der Iterirung.

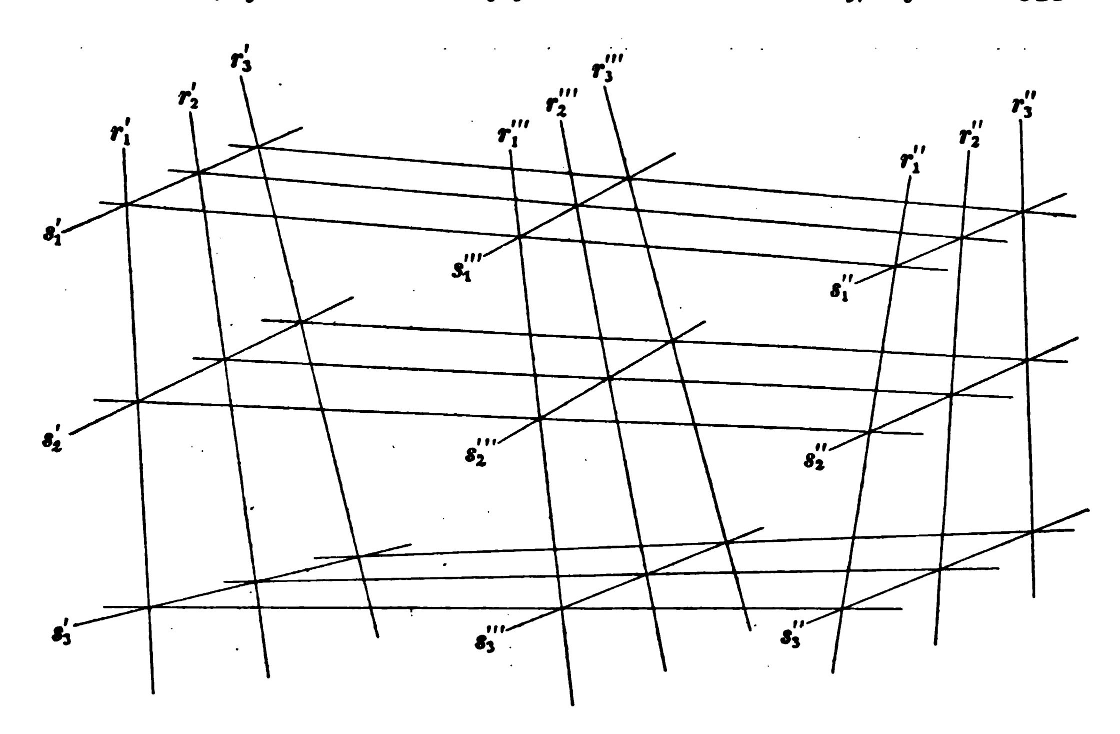
Durch die beiden vorhergehenden Paragraphen ist, wie in § 1 auseinandergesetzt wurde, der Beweis geliefert, dass $M^{(2)}$ *linear* ist. Beim Uebergang vom Punktraum $M_3^{(0)}$ zur Mf. $M_7^{(1)}$ projectiver Punktreihen zeigte sich, dass die einstufigen linearen Gebilde R_1 in $M_7^{(1)}$ vermöge einer Ab-

bildung auf die geraden Reihen G_1 von $M_3^{(1)}$ abermals projectiv beziehbar waren, wodurch die Möglichkeit geboten war, zu $M^{(2)}$ zu gelangen. Es ist klar, dass aus demselben Grunde die einstufigen Gebilde S_1 in $M^{(2)}$ projectiv beziehbar sind; denn die Schlüsse des § 1 gelten nicht nur für den Punktraum, sondern für eine beliebige lineare Mf. Wir können uns also denken, dass wir statt vom Punktraume gleich von $M_7^{(1)}$ ausgegangen wären. Indem wir die Regeln der Abbildung der Gebilde S_1 auf die R_1 mit denen der R_1 auf die G_1 combiniren, erhalten wir Abbildungen der S_1 auf die G_1, welche, wenn dasselbe S_1 abgebildet wird, unter einander projectiv sind. Es bedarf nun keines weiteren Beweises, dass die Mf. $M^{(3)}$ der zu einander projectiven S_1 des $M^{(2)}$ abermals linear ist, u. s. w.

Es erübrigt noch, die Dimension der so gewonnenen Mfn. abzuzählen. In einem R_n ist die Mf. projectiver Punktreihen $(2n+1)$-fach. Wenn also d_n die Dimension von $M^{(n)}$ ist, welches durch die $(n-1)$te Iterirung des Verfahrens gewonnen wurde, so ist $d_{n+1} = 2d_n+1$, also:

10) *Durch $(n-1)$-malige Iterirung des Verfahrens der Bildung projectiver Punktreihen, also im ganzen n-malige Anwendung dieses Verfahrens, gelangt man, vom Punktraume ausgehend, zu einer $(2^{n+2}-1)$-stufigen linearen Mannigfaltigkeit.*

Wir haben bisher das Verfahren der Iterirung in völliger Abstraction durchgeführt. Die ersten Schritte desselben lassen sich auch geometrisch verfolgen, wobei sich Sätze des Punktraums ergeben: Bezieht man zwei Regelschaaren $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ projectiver Punktreihen selbst projectiv auf einander und verbindet je zwei entsprechende Reihen durch eine Regelschaar projectiver Reihen, so giebt es ein System $\mathfrak{R}$ von ∞^1 Regelschaaren projectiver Reihen, welche zu je zweien dasselbe System $\overline{\mathfrak{R}}$ von ∞^1 Verbindungsregelschaaren liefern, wie $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$. (In der Figur ist $\mathfrak{R}'$ durch drei seiner Strahlen r_1', r_2', r_3' repräsentirt, $\mathfrak{R}''$ durch r_1'', r_2'', r_3'', eine Verbindungsregelschaar durch r_i', r_i'', r_i'''.) Die Träger der ∞^2 projectiven Punktreihen bilden also eine Strahlencongruenz $\mathfrak{C}_1$, welche sich in doppelter Weise als einfach unendliches System von Regelschaaren auffassen lässt. Wenn zwei Regelschaaren $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ projectiver Punktreihen projectiv bezogen sind, so sind auch ihre beiden Leit-Regelschaaren $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ projectiv bezogen, und hiermit sind neben den beiden Systemen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ auch zwei Systeme $\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}$ von je ∞^1 Regelschaaren projectiver Punktreihen definirt, welche



als Strahlencongruenz $\mathfrak{C}_2$ aufgefasst wieder identisch werden. (Z. B. gehört die Regelschaar (s_1', s_2', s_3') zu $\mathfrak{S}$, die Schaar (s_1', s_1'', s_1''') zu $\overline{\mathfrak{S}}$.) Jede Regelschaar des Systems $\mathfrak{R}$ hat eine des Systems $\mathfrak{S}$ zur Leitschaar. Aber auch die Regelschaaren $\overline{\mathfrak{R}}$ haben ∞^1 Leitschaaren $\mathfrak{T}$, und die Regelschaaren $\overline{\mathfrak{S}}$ ∞^1 Leitschaaren $\overline{\mathfrak{T}}$. Jedes der Systeme $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ bildet dieselbe dritte Strahlencongruenz $\mathfrak{C}_3$. Man hat auch umgekehrt im ganzen drei Systeme von ∞^1 Regelflächen zweiten Grades, von denen jedes durch Auflösung in die Strahlen seiner Regelschaaren zwei der obigen Congruenzen liefert, dagegen die dritte in lauter projectiven Punktreihen schneidet. Jede dieser Regelflächen hat mit jeder eines anderen Systems eine Gerade gemein. Fasst man aus dem einen System n_1 Regelflächen heraus, aus einem zweiten n_2, aus dem dritten n_3, so erhält man $n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1$ solche Gerade, welche mit den $n_1 . n_2 . n_3$ Punkten, in welchen sie sich schneiden, eine *Configuration* bilden. Durch jeden ihrer Punkte gehen drei ihrer Geraden, und auf jeder von $n_i n_k$ ihrer Geraden liegen n_h ihrer Punkte $(i, k, h = 1, 2, 3)$. Diese Configurationen und ihre Projectionen auf eine Ebene lassen sich linear construiren mittelst des bekannten Satzes: „Die drei Hauptdiagonalen eines einfachen Sechsseites, dessen Seiten abwechselnd Strahlen einer Regelschaar

und deren Leitschaar sind, schneiden sich in einem Punkte". Der einfachste nicht triviale Fall $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ ist in der Figur dargestellt.

Durch geometrische Verfolgung der zweiten Iterirung gelangt man zu Complexen, die sich in dreifacher Weise als einstufige Systeme von Congruenzen $\mathfrak{C}$ auffassen lassen. Aehnlich, wie früher mit einer solchen Congruenz noch zwei andere auftraten, so sind jetzt mit einem solchen Complex noch *drei* andere definirt. Ferner gelangt man durch die folgenden Iterirungen bis einschliesslich zur $(\lambda-2)$-ten zur Kenntniss von ***Configurationen*** mit folgenden Anzahleigenschaften: Wenn $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ ganze Zahlen sind, und P ihr Product, so giebt es linear construirbare Configurationen von $\sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \frac{P}{n_\varkappa}$ Geraden und P Punkten. Durch jeden Punkt gehen λ Gerade, und die Geraden theilen sich nach den Gliedern der Summe in λ Gruppen. Auf einer Geraden, welche der Gruppe mit $\frac{P}{n_\varkappa}$ Individuen angehört, liegen $n_\varkappa$ Punkte der Configuration. Für ein bestimmtes λ erhält man die einfachste nicht triviale und nicht durch ein niedrigeres λ erhaltbare Configuration für $n_1 = n_2 = \cdots = n_\lambda = 3$.

Der Beweis der Linearität der Mf. der projectiven geraden Punktreihen gilt nicht nur für den Punktraum, sondern für jede lineare Mf., deren Theilmannigfaltigkeiten sich projectiv beziehen lassen. Kennt man noch andere Verfahren, deren Iterirung fortgesetzt zu linearen Mfn. führt, so kann man, von irgend einer linearen Mf. unseres Raumes ausgehend, abwechselnd bald beliebig oft das eine, dann beliebig oft ein anderes jener Verfahren in Anwendung bringen und gelangt so zu linearen Mfn. mit unbegrenzt wachsender Dimension.

Lineare homogene Differentialgleichungen mit symmetrischer Integraldeterminante.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

Es sei das System der linearen Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \frac{dx_\varrho}{dt} = \sum_{i=1}^{n} E_i^{(\varrho)} x_i \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

gegeben, worin t die unabhängige Variable und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die unbekannten Functionen bedeuten. Wir wollen annehmen, dass es ein System von n Lösungen hat

$$(2.)\qquad \begin{cases} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \ldots, & x_n^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & x_3^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, \end{cases}$$

dessen Determinante von Null verschieden und symmetrisch ist, dass also $x_i^{(\nu)} = x_\nu^{(i)}$ ist.

Unter dieser Voraussetzung werden wir zeigen, dass die Integration des Systems (1.) sich immer auf Quadraturen zurückführen lässt.

Das gegebene System (1.) wird die Lösungen (2.) gestatten, wenn folgende Identitäten stattfinden

$$(3.)\qquad \frac{dx_\varrho^{(\nu)}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} E_i^{(\varrho)} x_i^{(\nu)}$$

für alle ν und ϱ ($= 1, 2, 3, \ldots, n$).

Diese Identitäten können auch so geschrieben werden:

$$\frac{dx_\nu^{(\varrho)}}{dt} = \sum_i E_i^{(\nu)} x_i^{(\varrho)},$$

und da $x_\nu^{(\varrho)} = x_\varrho^{(\nu)}$ sein soll, so folgen die Identitäten

$$\sum_i \{E_i^{(\nu)} x_i^{(\varrho)} - E_i^{(\varrho)} x_i^{(\nu)}\} = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$(4.)\qquad \sum_i \{E_i^{(\nu)} x_{i\varrho} - E_i^{(\varrho)} x_{i\nu}\} = 0.$$

Die Anzahl dieser Gleichungen, denen die unbekannten Lösungen $x_{i\nu}$ genügen, ist $\frac{1}{2}n(n-1)$ d. h. gleich der Anzahl aller verschiedenen Combinationen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ zu je zwei (wenn $\nu = \varrho$ ist, so verschwindet die Gleichung (4.) identisch), während die Anzahl der Unbekannten $x_{i\nu}$ gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Hieraus folgt, dass es im allgemeinen möglich sein wird, durch Auflösung des Systemes (4.) die Unbekannten $x_{i\nu}$ mit Hülfe von n unbestimmten Grössen $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ auszudrücken. Daher wollen wir vor allem die Auflösung des Systemes (4.) versuchen.

I.

Auflösung des Systemes $\sum_i \{E_i^{(\nu)} x_{i\varrho} - E_i^{(\varrho)} x_{i\nu}\} = 0.$

Wenn die Grössen $x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, x_{3\varrho}, \ldots, x_{n\varrho}$ (wo ϱ irgend eine von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ ist) als bekannt angesehen werden, so ist dieses System nach den übrigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Unbekannten auflösbar. In der That ist seine Determinante, die ich mit T_ϱ bezeichnen will, *im allgemeinen* von Null verschieden, d. h. sie kann nicht identisch für alle Werthe von $E_i^{(\nu)}$ verschwinden. Um es zu zeigen, nehmen wir die

$$E_\varrho^{(1)},\quad E_\varrho^{(2)},\quad E_\varrho^{(3)},\quad \ldots,\quad E_\varrho^{(n)},$$
$$E_1^{(\varrho)},\quad E_2^{(\varrho)},\quad E_3^{(\varrho)},\quad \ldots,\quad E_n^{(\varrho)}$$

und

$$E_1^{(1)},\quad E_2^{(2)},\quad E_3^{(3)},\quad \ldots,\quad E_n^{(n)}$$

als von Null verschieden an, alle übrigen aber gleich Null, dann wird das System (4.):

$$(4'.)\qquad \sum_i E_i^{(\varrho)} x_{i\nu} = E_\nu^{(\nu)} x_{\nu\varrho} + E_\varrho^{(\nu)} x_{\varrho\varrho}, \qquad (\nu \gtrless \varrho)$$

$$(4''.)\qquad (E_\nu^{(\nu)} - E_k^{(k)}) x_{\nu k} = E_\varrho^{(k)} x_{\varrho\nu} - E_\varrho^{(\nu)} x_{k\varrho}. \qquad \begin{pmatrix}\nu \gtrless \varrho \\ k \gtrless \varrho\end{pmatrix}$$

Aus den Gleichungen (4''.) kann man nun die Werthe von $x_{k\nu}$ (wo k und ν von einander und von ϱ verschieden sind) durch die $x_{1\varrho}, x_{2\varrho}, \ldots, x_{n\varrho}$ entnehmen; hat man diese, so findet man aus den $n-1$ Gleichungen (4'.) die noch übrig bleibenden $n-1$ Unbekannten $x_{11}, x_{22}, x_{33}, \ldots, x_{nn}$ (ausser

$x_{\varrho\varrho}$). Hieraus erhellt, dass die Determinante T_ϱ nicht identisch (d. h. für alle Werthe der E) verschwinden darf, da sich dieselbe für specielle Werthe von $E_i^{(\nu)}$ als verschieden von Null erwiesen hat.

Ich versuche nun, particuläre Lösungen des Systems (4.) zu finden. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n unbekannte Grössen, und man setze

$$x_{ik} = \varphi_i \varphi_k \tag{5.}$$

(dann ist offenbar $x_{ik} = x_{ki}$, wie es sein soll). Diese Werthe, in die Gleichungen (4.) eingesetzt, geben

$$\varphi_\varrho . \sum_i E_i^{(\nu)} \varphi_i = \varphi_\nu . \sum_i E_i^{(\varrho)} \varphi_i,$$

daraus folgt

$$\frac{\sum_i E_i^{(\nu)} \varphi_i}{\varphi_\nu} = \frac{\sum_i E_i^{(\varrho)} \varphi_i}{\varphi_\varrho};$$

es muss also das Verhältniss

$$\frac{\sum_i E_i^{(\nu)} \varphi_i}{\varphi_\nu}$$

für alle ν $(= 1, 2, 3, \ldots, n)$ einen und denselben Werth haben. Setzen wir also

$$\sum_i E_i^{(\nu)} \varphi_i = \omega . \varphi_\nu, \tag{6.}$$

so haben wir die n Unbekannten φ_i aus den Gleichungen (6.) zu bestimmen. Da nun diese Gleichungen homogen in den Unbekannten φ_i sind, so folgt für ω die Gleichung

$$\begin{vmatrix} E_1^{(1)} - \omega & E_2^{(1)} & E_3^{(1)} & \ldots & E_n^{(1)} \\ E_1^{(2)} & E_2^{(2)} - \omega & E_3^{(2)} & \ldots & E_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_1^{(n)} & E_2^{(n)} & E_3^{(n)} & \ldots & E_n^{(n)} - \omega \end{vmatrix} = 0 = \Delta(\omega), \tag{7.}$$

woraus ω bestimmt wird.

Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, dann findet man eine Lösung des Systemes (4.), indem man $\omega = \omega_k$ (k irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$) in die Gleichungen (6.) einsetzt, irgend eine von diesen n Gleichungen weglässt und die übrigen nach den φ_i auflöst. Man findet alsdann (indem man die $\nu = \alpha$ entsprechende Gleichung weglässt), dass die Unbekannten

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

den Unterdeterminanten

$$H_1^{(\alpha)},\quad H_2^{(\alpha)},\quad \ldots,\quad H_n^{(\alpha)}$$

analog sind.

Mit $H_i^{(\nu)}$ oder $H_i^{(\nu)}(\omega)$ bezeichne ich die dem Elemente $E_i^{(\nu)}$ (resp. $E_i^{(i)}-\omega$, falls $\nu=i$ ist) entsprechende Unterdeterminante in der Entwickelung der Determinante (7.).

Hieraus folgt, dass man eine particuläre Lösung des betrachteten Systemes (4.) haben wird, wenn man

$$\varphi_k = H_\nu^{(\alpha)}(\omega_k)$$

nimmt, folglich nach (5.)

$$x_{i\nu} = H_\nu^{(\alpha)}(\omega_k).H_i^{(\alpha)}(\omega_k)$$

setzt. Nun ist das System (4.) linear und homogen in Bezug auf die Unbekannten $x_{i\nu}$. Wenn es also durch die Zahlen $A_{i\nu}^{(1)}$ $(=x_{i\nu})$ und $A_{i\nu}^{(2)}$ $(=x_{i\nu})$ befriedigt wird, so wird es auch befriedigt durch die Summe $\lambda_1 A_{i\nu}^{(1)}+\lambda_2 A_{i\nu}^{(2)}$, welches auch die Zahlen λ_1 und λ_2 sein mögen. Hieraus folgt für das System (4.) die allgemeinere Lösung

$$(8.)\qquad x_{i\nu} = \sum_{k=1}^{n} C_k H_i^{(\alpha)}(\omega_k).H_\nu^{(\alpha)}(\omega_k),$$

wo die C_k beliebige Coefficienten sind.

Es ist zu bemerken, dass man durch Aenderung von α keine neue Lösung erhält, weil (wie bekannt) das Verhältniss $H_i^{(\alpha)}(\omega_k):H_i^{(\alpha')}(\omega_k)$ von i unabhängig ist.

Ich will nun zeigen, dass dies (mit einer leichten Aenderung in dem Falle, wo zwei oder mehrere Wurzeln gleich sind,) *die allgemeinste Lösung des Systemes* (4.) *ist, wenn es eine Unterdeterminante* (*etwa* $H_\beta^{(\alpha)}$) *giebt, welche mit der Determinante* $\Delta(\omega)$ *keine Wurzel gemein hat.* In der That wissen wir aus dem Vorhergehenden, dass n von den Unbekannten (etwa die $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \ldots, x_{n\beta}$) unbestimmt bleiben, alle übrigen aber durch diese n ausgedrückt werden können. Es genügt also zu zeigen, dass die durch die Formel (8.) gelieferten n Unbekannten $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \ldots, x_{n\beta}$ beliebige Werthe annehmen können, wenn nur die unbestimmten Coefficienten C_i gehörig bestimmt werden, d. i., dass das System

$$(9.)\qquad x_{i\beta} = \sum_{k=1}^{n} C_k H_i^{(\alpha)}(\omega_k).H_\beta^{(\alpha)}(\omega_k)\qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,n; \\ \beta \text{ bestimmt}\end{smallmatrix}\right)$$

nach den Unbekannten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lösbar ist.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} H_1^{(a)}(\omega_1) & H_1^{(a)}(\omega_2) & \dots & H_1^{(a)}(\omega_n) \\ H_2^{(a)}(\omega_1) & H_2^{(a)}(\omega_2) & \dots & H_2^{(a)}(\omega_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n^{(a)}(\omega_1) & H_n^{(a)}(\omega_2) & \dots & H_n^{(a)}(\omega_n) \end{vmatrix},$$

die wir kurz durch D_a bezeichnen wollen, und denken uns dieselbe nach den Elementen einer Horizontalreihe oder einer Colonne entwickelt. Wenn wir mit $A_i^{(k)}$ den Coefficienten des Elementes $H_i^{(a)}(\omega_k)$ bezeichnen, so ist

$$(10.)\quad \begin{cases} \sum_i A_i^{(k)} H_i^{(a)}(\omega_\lambda) = 0, & (k \gtrless \lambda) \\ \sum_i A_i^{(k)} H_i^{(a)}(\omega_k) = D_a, \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} \sum_k A_i^{(k)} H_\nu^{(a)}(\omega_k) = 0, & (\nu \gtrless i) \\ \sum_k A_i^{(k)} H_i^{(a)}(\omega_k) = D_a. \end{cases}$$

Es ist aber auch für jede Wurzel ω_k der Gleichung $\Delta(\omega) = 0$

$$(\alpha.)\quad \sum_i E_i^{(\varrho)} H_i^{(a)}(\omega_k) = \omega_k H_\varrho^{(a)}(\omega_k).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $A_\nu^{(k)}$ und summirt nach k, so erhält man

$$\sum_i \sum_k E_i^{(\varrho)} H_i^{(a)}(\omega_k) A_\nu^{(k)} = \sum_k \omega_k A_\nu^{(k)} H_\varrho^{(a)}(\omega_k),$$

oder nach den Formeln (11.):

$$(12.)\quad D_a E_\nu^{(\varrho)} = \sum_k \omega_k A_\nu^{(k)} H_\varrho^{(a)}(\omega_k).$$

Multipliciren wir noch mit $A_\varrho^{(\lambda)}$ und summiren nach ϱ, so finden wir mit Hülfe der Formeln (10):

$$(13.)\quad \sum_\varrho E_\nu^{(\varrho)} A_\varrho^{(\lambda)} = \omega_\lambda . A_\nu^{(\lambda)},$$

d. h.

$$\begin{aligned} (E_1^{(1)} - \omega_\lambda) A_1^{(\lambda)} + E_1^{(2)} A_2^{(\lambda)} + \dots + E_1^{(n)} A_n^{(\lambda)} &= 0, \\ E_2^{(1)} A_1^{(\lambda)} + (E_2^{(2)} - \omega_\lambda) A_2^{(\lambda)} + \dots + E_2^{(n)} A_n^{(\lambda)} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_n^{(1)} A_1^{(\lambda)} + E_n^{(2)} A_2^{(\lambda)} + \dots + (E_n^{(n)} - \omega_\lambda) A_n^{(\lambda)} &= 0, \end{aligned}$$

folglich sind die Coefficienten

$$A_1^{(\lambda)},\ A_2^{(\lambda)},\ \dots,\ A_n^{(\lambda)}$$

den Unterdeterminanten

$$H_\beta^{(1)}(\omega_\lambda),\quad H_\beta^{(2)}(\omega_\lambda),\quad \ldots,\quad H_\beta^{(n)}(\omega_\lambda)$$

proportional, wo β irgend eine von den Zahlen 1, 2, 3, ..., n ist. Setzen wir also

$$\sum_i H_i^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(i)}(\omega_k) = f_\beta^a(\omega_k) \quad \text{oder bloss} \quad f(\omega_k),$$

so erhalten wir nach den Formeln (10.) und (11.)

$$(14.)\qquad \begin{cases} \sum_i H_i^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(i)}(\omega_\lambda) = 0, & (k \gtrless \lambda) \\ \sum_i H_i^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(i)}(\omega_k) = f(\omega_k), \end{cases}$$

$$(15.)\qquad \begin{cases} \sum_k \frac{H_\nu^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(i)}(\omega_k)}{f(\omega_k)} = 0, & (\nu \gtrless i) \\ \sum_k \frac{H_\nu^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(\nu)}(\omega_k)}{f(\omega_k)} = 1, \end{cases}$$

und die Formel (12.) nimmt jetzt folgende bemerkenswerthe Form an:

$$(16.)\qquad E_\nu^{(\varrho)} = \sum_k \frac{\omega_k H_\varrho^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(\nu)}(\omega_k)}{f(\omega_k)}.$$

Beachtet man noch die Identitäten

$$H_i^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(\nu)}(\omega_k) = H_\beta^{(a)}(\omega_k) H_i^{(\nu)}(\omega_k),$$

(*Baltzer,* Determ. § 6), so kann man die letzten Formeln in der Form schreiben:

$$(14'.)\qquad \sum_i H_i^{(a)}(\omega_k) H_\beta^{(i)}(\omega_k) = f(\omega_k) = H_\beta^{(a)}(\omega_k).\sum_i H_i^{(i)}(\omega_k) = -H_\beta^{(a)}(\omega_k).\varDelta'(\omega_k),$$

$$(15'.)\qquad \begin{cases} \sum_k \frac{H_\nu^{(i)}(\omega_k)}{\varDelta'(\omega_k)} = 0, & (i \gtrless \nu) \\ \sum_k \frac{H_\nu^{(\nu)}(\omega_k)}{\varDelta'(\omega_k)} = -1, \end{cases}$$

$$(16'.)\qquad E_\nu^{(\varrho)} = -\sum_k \frac{\omega_k H_\varrho^{(\nu)}(\omega_k)}{\varDelta'(\omega_k)}.$$

Im Vorbeigehen bemerke ich, dass man die drei letzten Formeln (15'.) und (16'.) auch durch Zerlegung der Functionen $\frac{H(\omega)}{\varDelta(\omega)}$ in Partialbrüche erhalten könnte.

Mit Hülfe der Formeln (14.) lässt sich nun das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} H_1^{(\alpha)}(\omega_1) & H_1^{(\alpha)}(\omega_2) & \dots & H_1^{(\alpha)}(\omega_n) \\ H_2^{(\alpha)}(\omega_1) & H_2^{(\alpha)}(\omega_2) & \dots & H_2^{(\alpha)}(\omega_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_n^{(\alpha)}(\omega_1) & H_n^{(\alpha)}(\omega_2) & \dots & H_n^{(\alpha)}(\omega_n) \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} H_\beta^{(1)}(\omega_1) & H_\beta^{(1)}(\omega_2) & \dots & H_\beta^{(1)}(\omega_n) \\ H_\beta^{(2)}(\omega_1) & H_\beta^{(2)}(\omega_2) & \dots & H_\beta^{(2)}(\omega_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_\beta^{(n)}(\omega_1) & H_\beta^{(n)}(\omega_2) & \dots & H_\beta^{(n)}(\omega_n) \end{vmatrix},$$

oder $D^\alpha . D_\beta$, leicht berechnen. Man findet

$$(17.) \qquad D^\alpha . D_\beta = f(\omega_1) f(\omega_2) f(\omega_3) \dots f(\omega_n),$$

und da $f(\omega_k) = -H_\beta^{(\alpha)}(\omega_k).\Delta'(\omega_k)$ ist, so kommt

$$(18.) \qquad D^\alpha . D_\beta = (-1)^n . \{\prod_k H_\beta^{(\alpha)}(\omega_k)\} . \{\prod_k \Delta'(\omega_k)\}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\prod_k \Delta'(\omega_k) = \delta(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^2 . (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)},$$

wo $\delta(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

bedeutet, folglich ist

$$D^\alpha . D_\beta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+n} . \delta(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^2 . \prod_k H_\beta^{(\alpha)}(\omega_k).$$

Andererseits sind die Determinanten D^α und D_β durch $\delta(\omega_1, \dots, \omega_n)$ theilbar, und man findet leicht

$$\begin{vmatrix} H_1^{(\alpha)}(\omega_1) & \dots & H_1^{(\alpha)}(\omega_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ H_n^{(\alpha)}(\omega_1) & \dots & H_n^{(\alpha)}(\omega_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{1(1.2)(1.2.3)\dots(1.2.3\dots(n-1))} . \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} H_1^{(\alpha)}(0) & H_1^{(\alpha)}(0)' & H_1^{(\alpha)}(0)'' & \dots & H_1^{(\alpha)}(0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_n^{(\alpha)}(0) & H_n^{(\alpha)}(0)' & H_n^{(\alpha)}(0)'' & \dots & H_n^{(\alpha)}(0)^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} H_\beta^{(1)}(\omega_1) & \dots & H_\beta^{(1)}(\omega_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ H_\beta^{(n)}(\omega_1) & \dots & H_\beta^{(n)}(\omega_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{1(1.2)(1.2.3)\dots(1.2.3\dots(n-1))} . \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} H_\beta^{(1)}(0) & H_\beta^{(1)}(0)' & H_\beta^{(1)}(0)'' & \dots & H_\beta^{(1)}(0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_\beta^{(n)}(0) & H_\beta^{(n)}(0)' & H_\beta^{(n)}(0)'' & \dots & H_\beta^{(n)}(0)^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Folglich ist, wenn man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} H_1^{(a)}(0) & H_1^{(a)}(0)' & \dots & H_1^{(a)}(0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_n^{(a)}(0) & H_n^{(a)}(0)' & \dots & H_n^{(a)}(0)^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} H_\beta^{(1)}(0) & H_\beta^{(1)}(0)' & \dots & H_\beta^{(1)}(0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_\beta^{(n)}(0) & H_\beta^{(n)}(0)' & \dots & H_\beta^{(n)}(0)^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

mit S^a und S_β bezeichnet,

$$(19.) \quad S^a.S_\beta = 1^2.(1.2)^2(1.2.3)^2\dots(1.2.3\dots(n-1))^2 \prod_k H_\beta^{(a)}(\omega_k).(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+n}.$$

Aus dieser Formel sieht man, dass unter der gemachten Voraussetzung, *dass die Unterdeterminante $H_\beta^{(a)}(\omega)$ mit der Determinante $\Delta(\omega)$ keine Wurzel gemein hat,* das Product $S^a.S_\beta$ also auch beide, S^a und S_β, von Null verschieden sind.

Wir können nun das System der Gleichungen (9.) nach den Coefficienten C_k auflösen, d. h. die Coefficienten C_k so bestimmen, dass die $x_{1\beta}$, $x_{2\beta}$, ..., $x_{n\beta}$ beliebig gegebene Werthe annehmen. Zu dem Ende multipliciren wir beide Seiten mit $H_\beta^{(i)}(\omega_\nu)$ und summiren nach i; dann finden wir mit Beachtung der gefundenen Formeln:

$$C_\nu f(\omega_\nu).H_\beta^{(a)}(\omega_\nu) = \sum_i H_\beta^{(i)}(\omega_\nu)x_{i\beta}$$

oder

$$(20.) \quad C_\nu H_\beta^{(a)}(\omega_\nu)^2.\Delta'(\omega_\nu) = -\sum_i H_\beta^{(i)}(\omega_\nu)x_{i\beta},$$

woraus man sieht, dass, wenn die Wurzeln ω_1, ω_2, ..., ω_n von einander verschieden, d. h. alle einfach sind, die Werthe von C_1, C_2, ..., C_n ganz bestimmt sind.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (8.) ein, so erhält man die Werthe von $x_{i\nu}$ (wo i und ν verschieden von β sind) durch $x_{1\beta}$, $x_{2\beta}$, ..., $x_{n\beta}$ ausgedrückt. Man findet auf diese Weise mit Berücksichtigung der Formeln (14.) und (15.)

$$(21.) \quad x_{i\nu} = \sum_\lambda x_{\lambda\beta}\left\{\sum_k \frac{H_\nu^{(a)}(\omega_k)H_i^{(\lambda)}(\omega_k)}{f(\omega_k)}\right\}.$$

Wir haben gesehen, dass die Determinante des Systemes

$$(4.) \quad \sum_i \{E_i^{(\varrho)}x_{i\nu} - E_i^{(\nu)}x_{i\varrho}\} = 0,$$

worin die $x_{1\beta}$, $x_{2\beta}$, ..., $x_{n\beta}$ als bekannt angesehen werden (die mit T_β bezeichnet worden ist), im allgemeinen, d. i. wenn die $E_i^{(\nu)}$ durch keine Re-

lation verbunden sind, von Null verschieden ist, und deshalb haben die übrigen x ganz bestimmte Werthe, wenn die $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \ldots, x_{n\beta}$ beliebig bestimmt werden. Hier haben wir die Werthe (21.) von $x_{i\nu}$ durch die $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \ldots, x_{n\beta}$ gefunden, also das System (4.) nach den $x_{i\nu}$ aufgelöst, und zwar im allgemeinen Falle, wo zwischen den $E_i^{(\nu)}$ keine Relation existirt. Da nun dieses System zwei verschiedene allgemeine Lösungen nicht haben kann, so schliessen wir, dass die Formeln (21.) und (8.) die allgemeine Lösung dieses Systemes geben. Folglich muss die Determinante derselben, nämlich T_β, ein Theiler des gemeinschaftlichen Nenners in (21.) sein. Dieser gemeinschaftliche Nenner ist $\prod_k f(\omega_k)$, oder, nach (17.) bis (19.), $S^a.S_\beta.\delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^2.M$ (wo M eine bestimmte Zahl bedeutet). Von den drei Factoren dieses Nenners sind die S^a und S_β jeder in Bezug auf die E von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$, der andere aber von der Ordnung $n(n-1)$, während die Determinante T_β von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Nun aber kann S^a durch T_β nicht theilbar sein, weil sie die $E_1^{(a)}, E_2^{(a)}, \ldots, E_n^{(a)}$ nicht enthält. Ebenfalls ist der Factor $\delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^2$ durch T_β nicht theilbar, denn die Voraussetzung $E_\lambda^{(\mu)} = 0$ für $\lambda \lesseqgtr \mu$ macht $T_\beta = 0$ (wie leicht zu sehen), während $\delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^2$ gleich dem Producte $\Pi(E_\nu^{(\nu)} - E_k^{(k)})^2$ wird.

Hieraus schliessen wir, dass S_β durch T_β theilbar sein muss, und weil beide von gleicher Dimension sind (in Bezug auf die E), so folgt, dass

$$T_\beta = p.S_\beta$$

sein muss, wo p einen Zahlencoefficienten bedeutet.

Wir haben auf diese Weise die Determinante des Systemes (4.) bestimmt. Dass die Determinante S^a auch in (21.) vorkommt, ist leicht zu erklären; sie ist nämlich die Determinante des Systemes

$$\sum_i \{E_\nu^{(i)} x_{i\varrho} - E_\varrho^{(i)} x_{i\nu}\} = 0,$$

das man erhält, indem man $E_\mu^{(\lambda)}$ statt $E_\lambda^{(\mu)}$ schreibt. Dieses neue System wird offenbar durch dieselbe Determinante $\Delta(\omega)$ aufgelöst.

Die Formel (8.)

$$x_{i\nu} = \sum_k C_k H_i^{(a)}(\omega_k) H_\nu^{(a)}(\omega_k)$$

muss eine Aenderung erleiden, wenn die Determinante $\Delta(\omega)$ gleiche Wurzeln hat. Wenn nämlich die Coefficienten $E_\lambda^{(\mu)}$ sich einem Zustande nähern, wo zwei Wurzeln gleich werden (etwa ω_1 und ω_2), so fallen beide parti-

culäre Lösungen

$$H_i^{(a)}(\omega_1).H_\nu^{(a)}(\omega_1), \quad H_i^{(a)}(\omega_2).H_\nu^{(a)}(\omega_2)$$

in eine zusammen. Man kann aber statt der zweiten folgende Lösung nehmen

$$\frac{H_i^{(a)}(\omega_2)H_\nu^{(a)}(\omega_2)-H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1)}{\omega_2-\omega_1},$$

welche sich, wenn ω_2 gleich ω_1 wird, auf die nach ω_1 genommene Ableitung der ersten reducirt, d. i. $H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1)'+H_i^{(a)}(\omega_1)'H_\nu^{(a)}(\omega_1)$. Auf ähnliche Weise wird allgemein gezeigt, dass, wenn die Wurzel ω_1 p-fach ist, dieselbe p particuläre Lösungen des Systemes (4.) liefert:

$$H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1), \quad [H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1)]', \quad [H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1)]'', \quad \ldots, \quad [H_i^{(a)}(\omega_1)H_\nu^{(a)}(\omega_1)]^{(p-1)}.$$

Dass mit dieser Aenderung die Formel (8.) noch die allgemeinste Lösung des Systemes (4.) liefert, lässt sich leicht erkennen. In der That kann man auch jetzt die Coefficienten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ so bestimmen, dass die $x_{1\beta}$, $x_{2\beta}, \ldots, x_{n\beta}$ beliebig gegebene Werthe annehmen. Denn die Determinante, von der diese Bestimmung abhängt, lässt sich in die Form

$$\begin{vmatrix} H_1^{(a)}(\omega_1) & H_2^{(a)}(\omega_1) & \ldots & H_n^{(a)}(\omega_1) \\ H_1^{(a)}(\omega_1)' & H_2^{(a)}(\omega_1)' & \ldots & H_n^{(a)}(\omega_1)' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(a)}(\omega_1)^{(p-1)} & H_2^{(a)}(\omega_1)^{(p-1)} & \ldots & H_n^{(a)}(\omega_1)^{(p-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(a)}(\omega_n) & H_2^{(a)}(\omega_n) & \ldots & H_n^{(a)}(\omega_n) \end{vmatrix} \cdot H_\beta^{(a)}(\omega_1)^p . H_\beta^{(a)}(\omega_{p+1}) \ldots H_\beta^{(a)}(\omega_n),$$

oder

$$S^a . H_\beta^{(a)}(\omega_1)^p . H_\beta^{(a)}(\omega_{p+1}) \ldots H_\beta^{(a)}(\omega_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{\omega_1}{1} & \frac{\omega_1^2}{1.2} & \ldots & \frac{\omega_1^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ 0 & 1 & \frac{\omega_1}{1} & \ldots & \frac{\omega_1^{n-2}}{1.2\ldots(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{\omega_n}{1} & \frac{\omega_n^2}{1.2} & \ldots & \frac{\omega_n^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \end{vmatrix}$$

setzen, und diese letztere ist unter der schon gemachten Voraussetzung, dass $H_\beta^{(a)}(\omega)$ und $\Delta(\omega)$ keine Wurzel gemein haben, von Null verschieden.

Auf ähnliche Weise wird man verfahren, wenn die Gleichung $\Delta(\omega)=0$ mehrere vielfache Wurzeln hat.

II.

Wir haben jetzt noch zu sehen, ob die gefundenen Werthe (8.) der $x_{i\nu}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der linearen Differentialgleichungen (1.) bilden. Ihre Determinante $|x_{i\nu}|$ ist leicht zu finden, sie ist

$$C_1.C_2.C_3\dots C_n.(D^a)^2$$

oder

$$C_1.C_2.C_3\dots C_n(S^a)^2\delta(\omega_1,\ \omega_2,\ \dots,\ \omega_n)^2.\frac{1}{1^2.(1.2)^2(1.2.3)^2\dots(1.2.3\dots(n-1))^2},$$

also verschieden von Null, wenn die Coefficienten $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ von Null verschieden sind. (Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall, wo die Gleichung $\varDelta(\omega)=0$ keine gleichen Wurzeln hat.)

Drücken wir noch aus, dass die Werthe (8.) der $x_{i\nu}$ die Gleichungen (1.) erfüllen, so finden wir mit Hülfe der Formel (α.) für die Coefficienten $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ folgende Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist:

$$(22.)\quad \begin{cases} \sum_k \Big\{\Big(\frac{dC_k}{dt}-C_k\omega_k\Big)H_\nu^{(a)}(\omega_k)H_\varrho^{(a)}(\omega_k)+C_kH_\varrho^{(a)}(\omega_k)\frac{dH_\nu^{(a)}(\omega_k)}{dt} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +C_kH_\nu^{(a)}(\omega_k)\frac{dH_\varrho^{(a)}(\omega_k)}{dt}\Big\} = 0, \end{cases}$$

und wenn wir diese Gleichungen mit $H_\beta^{(\nu)}(\omega_\lambda).H_\beta^{(\varrho)}(\omega_\mu)$ multipliciren und über ν und ϱ summiren, so erhalten wir

$$(23.)\qquad C_\lambda.f(\omega_\lambda)N_\mu^{(\lambda)}+C_\mu f(\omega_\mu)N_\lambda^{(\mu)} = 0, \qquad (\text{wenn } \lambda \gtrless \mu)$$

und

$$(24.)\qquad \frac{d}{dt}\log C_\lambda = \omega_\lambda-\frac{2}{f(\omega_\lambda)}N_\lambda^{(\lambda)}. \qquad (\text{wenn } \lambda=\mu \text{ ist}).$$

Zur Abkürzung ist dabei gesetzt:

$$(25.)\qquad N_\lambda^{(\mu)} = \sum_i H_\beta^{(i)}(\omega_\lambda)\frac{dH_i^{(a)}(\omega_\mu)}{dt}.$$

Aus den Gleichungen (24.) lassen sich die n Coefficienten $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ der Werthe (8.) durch Quadraturen finden. Die übrigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen (23.) müssen alsdann von den Coefficienten E des gegebenen Systemes erfüllt werden. Es ergeben sich also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer symmetrischen Determinante der Lösungen des Systemes (1.). Diese Bedingungsgleichungen nehmen, wenn man die Werthe der C_i aus (24.) berücksichtigt, folgende Form an:

$$(26.)\quad \omega_\lambda-\frac{2}{f(\omega_\lambda)}N_\lambda^{(\lambda)}+\frac{d\log f(\omega_\lambda)}{dt}+\frac{d\log N_\lambda^{(\mu)}}{dt} = \omega_\mu-\frac{2}{f(\omega_\mu)}N_\mu^{(\mu)}+\frac{d\log f(\omega_\mu)}{dt}+\frac{d\log N_\mu^{(\lambda)}}{dt}.$$

Sind diese Bedingungen (26.) erfüllt, so lassen sich die bei der Integration der Gleichungen (24.) auftretenden Constanten so bestimmen, dass auch die Gleichungen (23.) erfüllt werden. Dann hat das gegebene System folgende Lösungen

$$x_{i\nu} = \sum_k C_k H_i^{(a)}(\omega_k) H_\nu^{(a)}(\omega_k),$$

folglich ist die allgemeine Lösung desselben:

$$(27.)\qquad x_i = \sum_\nu A_\nu x_{i\nu} = \sum_k C_k H_i^{(a)}(\omega_k) \left|\sum_\nu A_\nu H_\nu^{(a)}(\omega_k)\right|,$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige Constanten bedeuten.

Um eine Anwendung zu geben, will ich den besonderen Fall betrachten, wo alle $N_\lambda^{(\mu)}(\lambda \gtrless \mu)$ Null sind. In diesem Falle lassen sich die Unterdeterminanten $H_i^{(a)}(\omega_k)$ und $H_\beta^{(i)}(\omega_k)$, mithin auch das System (1.), leicht finden. Zu dem Ende multipliciren wir die Gleichung (25.) mit $\frac{H_\nu^{(a)}(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)}$ und summiren über λ, so kommt

$$(28.)\qquad \frac{dH_\nu^{(a)}(\omega_\mu)}{dt} = \sum_\lambda N_\lambda^{(\mu)} \frac{H_\nu^{(a)}(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)}.$$

Ferner hat man aus den Gleichungen (14.):

$$(29.)\qquad \begin{cases} \sum_i H_i^{(a)}(\omega_\lambda) \dfrac{dH_\beta^{(i)}(\omega_\mu)}{dt} = -N_\mu^{(\lambda)} & (\lambda \gtrless \mu) \\ \sum_i H_i^{(a)}(\omega_\lambda) \dfrac{dH_\beta^{(i)}(\omega_\lambda)}{dt} = -N_\lambda^{(\lambda)} + \dfrac{df(\omega_\lambda)}{dt}, \end{cases}$$

und daraus ergiebt sich:

$$(30.)\qquad \frac{dH_\beta^{(\nu)}(\omega_\mu)}{dt} = -\sum_\lambda N_\mu^{(\lambda)} \frac{H_\beta^{(\nu)}(\omega_\lambda)}{f(\omega_\lambda)} + H_\beta^{(\nu)}(\omega_\mu) \frac{d\log f(\omega_\mu)}{dt}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt jetzt nach der oben gemachten Voraussetzung $N_\lambda^{(\mu)} = 0\ (\lambda \lessgtr \mu)$:

$$\frac{d\log H_\nu^{(a)}(\omega_\mu)}{dt} = N_\mu^{(\mu)} \frac{1}{f(\omega_\mu)},$$

$$\frac{d\log H_\beta^{(\nu)}(\omega_\mu)}{dt} = -N_\mu^{(\mu)} \frac{1}{f(\omega_\mu)} + \frac{d\log f(\omega_\mu)}{dt},$$

oder auch

$$(31.)\qquad \begin{cases} H_\nu^{(a)}(\omega_\mu) = A_\nu^{(\mu)} . e^{\int P_\mu dt}, \\ H_\beta^{(\nu)}(\omega_\mu) = B_\nu^{(\mu)} . e^{-\int P_\mu dt} f(\omega_\mu), \end{cases}$$

wo $A_\nu^{(\mu)}$ und $B_\nu^{(\mu)}$ Constanten bedeuten und der Kürze wegen P_μ statt $\frac{N_\mu^{(\mu)}}{f(\omega_\mu)}$ geschrieben ist.

Die $2n^2$ Constanten $A_\nu^{(\mu)}$ und $B_\nu^{(\mu)}$ genügen folgenden Gleichungen:

$$(32.)\quad \begin{cases} \sum_i A_i^{(\lambda)} B_i^{(\lambda)} = 1, \\ \sum_i A_i^{(\lambda)} B_i^{(\mu)} = 0, \end{cases} \qquad (\lambda \gtrless \mu)$$

$$(33.)\quad \begin{cases} \sum_\lambda A_\nu^{(\lambda)} B_i^{(\lambda)} = 0, \\ \sum_\lambda A_i^{(\lambda)} B_i^{(\lambda)} = 1, \end{cases} \qquad (\nu \gtrless i)$$

welche sich aus den Formeln (14.) und (15.) unmittelbar ergeben. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

mit θ und die $A_\varrho^{(\mu)}$ entsprechende Unterdeterminante derselben mit $\theta_\varrho^{(\mu)}$, so findet man aus den Gleichungen (32.) und (33.)

$$B_\varrho^{(\mu)} = \frac{\theta_\varrho^{(\mu)}}{\theta}.$$

Nachdem wir die $H_\nu^{(\alpha)}$ und $H_\beta^{(\nu)}$ gefunden haben, können wir auch die Coefficienten $E_\nu^{(\varrho)}$ des Systemes (1.) aus der Formel (16.) berechnen. Wir finden auf diese Weise

$$(34.)\quad E_\nu^{(\varrho)} = \frac{1}{\theta} \sum_\lambda \omega_\lambda A_\varrho^{(\lambda)} \theta_\nu^{(\lambda)},$$

folglich ist das System der linearen homogenen Differentialgleichungen, für welches $N_\lambda^{(\mu)} = 0$ ist $(\lambda \gtrless \mu)$, das folgende:

$$(35.)\quad \theta \cdot \frac{dx_\varrho}{dt} = \sum_\nu \sum_\lambda \omega_\lambda A_\varrho^{(\lambda)} \theta_\nu^{(\lambda)} x_\nu.$$

Die n^2 Constanten $A_\varrho^{(\lambda)}$ bleiben willkürlich, auch die $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sind beliebige Functionen der unabhängigen Variablen t. In der That findet man leicht aus (34.):

$$\sum_\nu E_\nu^{(\varrho)} A_\nu^{(\tau)} = \omega_\tau A_\varrho^{(\tau)}, \qquad (\tau, \varrho = 1, 2, \dots, n)$$

woraus die Gleichung

$$\Delta(\omega_\tau) = 0 \qquad (\tau = 1, 2, \dots, n)$$

unmittelbar folgt, welches auch die Constanten $A_\nu^{(\varrho)}$ und die Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sein mögen.

Die symmetrischen Lösungen des Systemes (35.) sind nach dem Vorhergehenden:

$$x_{i\nu} = \sum_k C_k A_i^{(k)} A_\nu^{(k)} e^{2\int P_k dt};$$

es ist aber nach den Gleichungen (31.):

$$H_\beta^{(\alpha)}(\omega_k) = A_\beta^{(k)} e^{\int P_k dt} = B_\alpha^{(k)} e^{-\int P_k dt} f(\omega_k),$$

folglich ist

$$e^{2\int P_k dt} = \frac{B_\alpha^{(k)} f(\omega_k)}{A_\beta^{(k)}} = \frac{\theta_\alpha^{(k)} f(\omega_k)}{\theta . A_\beta^{(k)}},$$

also

$$(36.)\qquad x_{i\nu} = \frac{1}{\theta} \sum_k C_k \frac{A_i^{(k)} A_\nu^{(k)} \theta_\alpha^{(k)} f(\omega_k)}{. A_\beta^{(k)}}.$$

Die Coefficienten C_k müssen aus den Gleichungen (24.) bestimmt werden. Nun ist aber

$$2\int P_k dt = \log\left\{\frac{\theta_\alpha^{(k)} . f(\omega_k)}{\theta . A_\beta^{(k)}}\right\},$$

also

$$2P_k = \frac{d\log f(\omega_k)}{dt},$$

und

$$N_k^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{df(\omega_k)}{dt},$$

weil $P_k = \frac{N_k^{(k)}}{f(\omega_k)}$ ist. Dieser Werth von $N_k^{(k)}$, in die Gleichungen (24.) eingesetzt, giebt

$$\frac{d\log C_k}{dt} = \omega_k - \frac{d\log f(\omega_k)}{dt},$$

folglich ist

$$C_k f(\omega_k) = C_k' e^{\int \omega_k dt},$$

wo C_k' die aus der Integration entspringende Constante ist, und die symmetrischen Lösungen des Systemes (35.) sind also

$$x_{i\nu} = \sum_k A_i^{(k)} A_\nu^{(k)} C_k'' e^{\int \omega_k dt},$$

wo statt $\frac{C_k' \theta_\alpha^{(k)}}{\theta . A_\beta^{(k)}}$ bloss C_k'' geschrieben ist.

Aus diesen Lösungen folgt endlich die allgemeine Lösung desselben Systemes (35.):

$$x_i = \sum_k M_k A_i^{(k)} e^{\int \omega_k dt},$$

wo M_k eine willkürliche Constante bedeutet.

Zur Theorie der Differentialparameter.

(Von Herrn *J. Knoblauch.*)

Die von *Beltrami* eingeführten Differentialparameter, deren fundamentale Bedeutung für die Theorie der Abwickelung bekannt ist, sind in neuerer Zeit auch für diejenigen Differentialformen aufgestellt worden, welche ausser dem Quadrat des Linienelements in der Flächentheorie eine Rolle spielen. Die hierbei gefundenen Ausdrücke und deren Anwendungen erscheinen jedoch meist nicht in ihrer einfachsten Gestalt, und zwar weil man darauf verzichtet hat, die jedesmaligen Voraussetzungen der Formeln scharf hervorzuheben und auf ihre kleinste Anzahl zusammenzuziehen. Während ein Theil der Resultate der simultanen Transformation irgend zweier quadratischen oder bilinearen Differentialformen seine Entstehung verdankt, beruht ein anderer auf dem Zusammenhange zwischen den Coefficienten dieser Formen und den Cartesischen Coordinaten der Fläche. Dies soll im Folgenden genauer dargelegt werden; ein Hauptzweck der Untersuchung ist aber, auf die Wichtigkeit derjenigen linearen Verbindungen aus den ersten Ableitungen einer Function hinzuweisen, welche *Frobenius* in einer vor Kurzem erschienenen Abhandlung (dieses Journal, Bd. 110, S. 14) eingeführt hat. Allerdings bedürfen diese Grössen, wenn ihre Bedeutung klar hervortreten soll, einer veränderten Definition (§ III). Die nachstehend entwickelten Formeln finden sich zum Theil, von dem dort eingenommenen Standpunkt hergeleitet, in der eben erwähnten Abhandlung. — Eine ausführliche Angabe der Ausdrücke für die in der Flächentheorie auftretenden Differentialparameter ist für den vorliegenden Zweck nicht erforderlich; und ebenso wenig sollen die sich darbietenden Anwendungen, z. B. auf die Theorie der Reciprocalflächen, der Evoluten und der Curven auf den Flächen an dieser Stelle in Betracht gezogen werden.

I.

Es sei

$$(1.)\qquad (c_{11}\delta u+c_{12}\delta v)\mathfrak{d}u+(c_{21}\delta u+c_{22}\delta v)\mathfrak{d}v = \mathfrak{C}$$

eine gegebene bilineare Differentialform. Ihre Coefficienten c_{ik} sind reguläre Functionen von u und v; der Bereich dieser Veränderlichen sei ausserdem so begrenzt, dass die Determinante der Form,

$$(2.)\qquad c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21} = \mathfrak{c},$$

stets dasselbe Zeichen behält. Zu $\mathfrak{C}$ gehört der bilineare Differentialparameter

$$(3.)\qquad \frac{1}{\mathfrak{c}}\Big[\Big(c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-c_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial v}+\Big(c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big] = \varDelta_{\mathfrak{c}}(\varphi,\psi)$$

und ein zweiter, welcher aus diesem durch Vertauschung von φ mit ψ hervorgeht. Setzt man

$$(4.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{c}}}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = D_{\mathfrak{c}}(\varphi,\psi),$$

$$(5.)\qquad \frac{c_{12}-c_{21}}{\sqrt{\mathfrak{c}}} = J_{\mathfrak{c}},$$

so ist

$$(6.)\qquad \varDelta_{\mathfrak{c}}(\psi,\varphi)-\varDelta_{\mathfrak{c}}(\varphi,\psi) = -J_{\mathfrak{c}}D_{\mathfrak{c}}(\varphi,\psi).$$

Unter $\sqrt{\mathfrak{c}}$ wird ein beliebiger, aber dann bestimmter Werth der Quadratwurzel aus $\mathfrak{c}$ verstanden; ist $\mathfrak{c}$ positiv, so soll, wenn nichts anderes bemerkt wird, auch $\sqrt{\mathfrak{c}}$ positiv genommen werden.

Für $\psi=\varphi$ liefern beide Grössen $\varDelta_{\mathfrak{c}}$ übereinstimmend den Differentialparameter erster Ordnung der Function $\varphi(u,v)$:

$$(7.)\qquad \frac{1}{\mathfrak{c}}\Big[c_{11}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)^2-(c_{12}+c_{21})\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+c_{22}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)^2\Big] = \varDelta_{\mathfrak{c}}^1\varphi.$$

Die beiden Differentialparameter zweiter Ordnung werden durch die Ausdrücke

$$(8.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{c}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathfrak{c}}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-c_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathfrak{c}}}\right] = \varDelta_{\mathfrak{c}}^2\varphi,$$

$$(9.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{c}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-c_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathfrak{c}}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathfrak{c}}}\right] = \overline{\varDelta}_{\mathfrak{c}}^2\varphi$$

erklärt und hängen unter einander durch die Gleichung zusammen:

$$(10.)\qquad \overline{\Delta}_c^2\varphi - \Delta_c^2\varphi = D_c(J_c, \varphi).$$

Für $c_{21} = c_{12}$ werden die beiden bilinearen, sowie die beiden Differentialparameter zweiter Ordnung identisch, und es würde behufs ihrer Definition ausreichen, die quadratische Differentialform

$$c_{11}du^2 + 2c_{12}du\,dv + c_{22}dv^2$$

in Betracht zu ziehen.

Setzt man im Besonderen die in $\mathfrak{C}$ auftretenden Paare von Differentialen einander gleich, so erhält man die quadratische Form

$$(11.)\qquad c_{11}du^2 + (c_{12}+c_{21})du\,dv + c_{22}dv^2 = \Gamma,$$

deren zugehörige Differentialparameter also aus den Ausdrücken (3.) und (8.) dadurch hervorgehen, dass c_{12} und c_{21} durch $\frac{1}{2}(c_{12}+c_{21})$ ersetzt werden. Es sei

$$(12.)\qquad c_{11}c_{22} - \tfrac{1}{4}(c_{12}+c_{21})^2 = c,$$

$$(13.)\quad \frac{1}{c}\Big[\Big(c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \tfrac{1}{2}(c_{12}+c_{21})\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial v} + \Big(c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \tfrac{1}{2}(c_{12}+c_{21})\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big] = \Delta_c(\varphi, \psi),$$

$$(14.)\qquad \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{2}(c_{12}+c_{21})\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{c}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{2}(c_{12}+c_{21})\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{c}}\right] = \Delta_c^2\varphi,$$

und ferner

$$(15.)\qquad \frac{c}{\mathrm{c}} = \lambda$$

gesetzt. Die eben eingeführten Differentialparameter stehen, wie eine einfache Rechnung lehrt, zu den vorher definirten vermöge der Gleichungen

$$(16.)\qquad \Delta_c(\varphi, \psi) = \frac{1}{\lambda}[\Delta_c(\varphi, \psi) - \tfrac{1}{2}J_c D_c(\varphi, \psi)],$$

$$(17.)\qquad \Delta_c^2\varphi = \frac{1}{\lambda}\Big[\Delta_c^2\varphi - \frac{1}{2\lambda}\Delta_c(\varphi, \lambda) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\,D_c\Big(\frac{J_c}{\sqrt{\lambda}}, \varphi\Big)\Big]$$

in Beziehung.

II.

Es seien nun weiter

$$(1.)\qquad a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2 = \mathsf{A},$$

$$(2.)\qquad b_{11}du^2 + 2b_{12}du\,dv + b_{22}dv^2 = \mathsf{B}$$

zwei quadratische Differentialformen, mit den Determinanten a und b. Die

zu ihnen gehörigen Differentialparameter gehen aus den Gleichungen I (3, 7, 8) für $c_{ik} = a_{ik}$ und $c_{ik} = b_{ik}$ $(c_{ki} = c_{ik})$ hervor. Wenn eine der beiden Formen vor der anderen bevorzugt erscheint, wie dies in der Flächentheorie mit $\mathsf{A} = ds^2$ der Fall ist, so empfiehlt es sich, namentlich für die praktische Berechnung, noch einen weiteren Differentialparameter zweiter Ordnung einzuführen, nämlich

$$(3.)\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{b_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{a}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{b_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-b_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right] = \varDelta^2_{ab}\varphi.$$

Eine bilineare Differentialform ergiebt sich als Covariante von A und B durch den Ausdruck

$$(4.)\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix} a_{11}\mathfrak{d}u+a_{12}\mathfrak{d}v, & a_{12}\mathfrak{d}u+a_{22}\mathfrak{d}v \\ b_{11}\delta u+b_{12}\delta v, & b_{12}\delta u+b_{22}\delta v\end{vmatrix} = \mathfrak{C}$$

dargestellt. Setzt man

$$(5.)\quad \begin{cases} a_{12}b_{12}-a_{22}b_{11} = \eta_{11}, & a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12} = \eta_{12}, \\ a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12} = \eta_{21}, & a_{12}b_{12}-a_{11}b_{22} = \eta_{22}, \end{cases}$$

so wird nach I (1.):

$$(6.)\quad \begin{cases} c_{11} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\eta_{12}, & c_{12} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\eta_{22}, \\ c_{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}\eta_{11}, & c_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}}\eta_{21}. \end{cases}$$

Die invarianten Grössen, welche in den vorhin aufgestellten Formeln vorkommen, lassen sich durch die beiden algebraischen simultanen Invarianten von A und B, nämlich

$$(7.)\quad \frac{a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = H_{ab}, \quad \frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} = K_{ab}$$

ausdrücken; wenn keine Verwechselung eintreten kann, mögen diese einfach mit H und K bezeichnet werden. Es ist

$$(8.)\quad \mathfrak{c} = aK, \quad c = -\tfrac{1}{4}a(H^2-4K),$$

mithin

$$(9.)\quad \lambda = -\frac{1}{4}\frac{H^2-4K}{K}, \quad J_{\mathfrak{c}} = \frac{H}{\sqrt{K}}.$$

Ferner ergiebt sich die Gleichung

$$(10.)\quad \varDelta^2_b\varphi = \frac{1}{K}[\varDelta^2_{ab}\varphi-\tfrac{1}{2}\varDelta_b(\varphi, K)].$$

Eine zweite wichtige Covariante von A und B ist bekanntlich die Form

$$HB - KA = E, \tag{11.}$$

deren Differentialparameter durch die der beiden Ausgangsformen dargestellt werden können. Man findet

$$\Delta_e(\varphi, \psi) = \frac{1}{K}[H\Delta_b(\varphi, \psi) - \Delta_a(\varphi, \psi)], \tag{12.}$$

$$\Delta_e^2\varphi = \frac{1}{K}\left[H\Delta_b^2\varphi - \Delta_a^2\varphi + \sqrt{K}\Delta_b\left(\varphi, \frac{H}{\sqrt{K}}\right)\right]. \tag{13.}$$

Welche Differentialparameter man im gegebenen Falle am zweckmässigsten direct berechnet, um dann die übrigen aus diesen Relationen zu entnehmen, hängt selbstverständlich von der Natur der Function φ ab.

Von der sich unmittelbar darbietenden Erweiterung der eben gegebenen Definitionen und Formeln auf ein System zweier bilinearen Formen kann für das Folgende abgesehen werden.

III.

Nimmt man zu den Formen A, B und ihren algebraischen Covarianten die Differentiale der Invarianten H und K hinzu, so kann man mit den elementaren Hülfsmitteln der Formentheorie eine grosse Anzahl covarianter und invarianter Ausdrücke herstellen, welche im allgemeinen von den Ableitungen der Coefficienten a_{ik} und b_{ik} abhängen. Die Theorie der Flächen giebt den Weg an, auf welchem man sich in diesem Gebiete orientiren und diejenigen Grössen auffinden kann, deren Einführung naturgemäss und nützlich ist. Es seien $(X_1 Y_1 Z_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2)$ die Richtungscosinus der Haupttangenten in einem Flächenpunkte, dessen rechtwinklige Cartesische Coordinaten mit x, y, z bezeichnet sind. Für diese Cosinus bestehen Gleichungen von der Gestalt

$$X_k = \mu_k \frac{\partial x}{\partial u} + \nu_k \frac{\partial x}{\partial v}, \quad (k=1,2) \tag{1.}$$

welche darauf führt, die Grösse $\mu_k \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \nu_k \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ als eine zugehörige Form oder als einen Differentialparameter von φ für das Formenpaar (A, B) nachzuweisen. Die beiden irrationalen algebraischen Invarianten dieser Formen seien mit r_1 und r_2 bezeichnet, so dass

$$r_1 + r_2 = H, \quad r_1 r_2 = K; \quad H^2 - 4K = (r_1 - r_2)^2; \tag{2.}$$

ferner sei

$$(3.)\qquad \frac{1}{r_k} = \varrho_k. \qquad (k=1,2)$$

In der Flächentheorie ist

$$(4.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = ds^2 = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \\ \mathsf{B} = \dfrac{ds^2}{\varrho} = Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2, \end{cases}$$

und für das Quadrat des Linienelements einer Evolute ergiebt sich der Ausdruck

$$ds_1^2 = E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2 = \left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(ds^2-\varrho_1\frac{ds^2}{\varrho}\right)+d\varrho_1^2.$$

(Vgl. zum Folgenden meine „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen", § 81.)

Es werde nun allgemein

$$(5.)\qquad \left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(\mathsf{A}-\varrho_1\mathsf{B})+d\varrho_1^2 = \mathsf{A}_1$$

gesetzt und aus A_1 und $d\varrho_1$ die lineare Covariante gebildet, welche der Functionaldeterminante entspricht, ferner mit der Invariante $\frac{\varrho_2}{2(\varrho_1-\varrho_2)}$ multiplicirt; das Resultat sei

$$(6.)\qquad \mathfrak{M}_1 = \sqrt{a}(\nu_1du-\mu_1dv).$$

Dann ist, wenn man die Operation in gleicher Weise für die Form

$$\left(1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)(\mathsf{A}-\varrho_2\mathsf{B})+d\varrho_2^2 = \mathsf{A}_2$$

ausgeführt denkt und mit a_k die Determinante von A_k bezeichnet:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \mu_k = \dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a_k}}\left[(a_{12}-b_{12}\varrho_k)\dfrac{\partial\varrho_k}{\partial v}-(a_{22}-b_{22}\varrho_k)\dfrac{\partial\varrho_k}{\partial u}\right], \\ \nu_k = \dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a_k}}\left[(a_{12}-b_{12}\varrho_k)\dfrac{\partial\varrho_k}{\partial u}-(a_{11}-b_{11}\varrho_k)\dfrac{\partial\varrho_k}{\partial v}\right]. \end{cases} \qquad (k=1,2)$$

Vermöge des Werthes von a_k enthalten diese Ausdrücke nur scheinbar die Ableitungen der Grössen ϱ_k, d. h. der Coefficienten a_{ik} und b_{ik}.

Aus der Form von $\mathfrak{M}_1$ folgt die gesuchte Eigenschaft der oben genannten, homogenen linearen Function von $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. Es werde gesetzt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \mu_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\nu_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \Theta_1\varphi, \\ \mu_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\nu_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \Theta_2\varphi; \end{cases}$$

dann gehen also $\Theta_1\varphi$ und $\Theta_2\varphi$ bei einer beliebigen Transformation zu neuen Veränderlichen in die formell gleichgebildeten Ausdrücke über.

Für die Determinante der Gleichungen (8.) ergiebt sich mit Benutzung von

$$(9.)\qquad (a_{11}-b_{11}\varrho_k)(a_{22}-b_{22}\varrho_k)-(a_{12}-b_{12}\varrho_k)^2 = 0 \qquad (k=1,2)$$

die Formel

$$(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)^2 = \frac{1}{a}.$$

Nach willkürlicher Annahme der Wurzelwerthe $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a_1}$ kann man durch passende Verfügung über $\sqrt{a_2}$ bewirken, dass

$$(10.)\qquad \mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

wird.

Um gleich an dieser Stelle die Festsetzungen zu erledigen, welche für die Flächentheorie gebraucht werden, so ist dort

$$E>0,\quad G>0,\quad a=T^2>0,\quad T>0,\quad a_1=T_1^2>0,\quad a_2=T_2^2>0.$$

Die abwickelbaren Flächen werden von der Untersuchung ausgeschlossen. —

Die eben gemachte Zeichenbestimmung läuft auf eine bestimmte Wahl des Fortganges auf einer der beiden Krümmungslinien hinaus. Die Parameter der beiden Schaaren dieser Curven, welche durch die Differentialgleichung $\Gamma=0$ bestimmt werden, seien mit p und q bezeichnet, die Fundamentalgrössen der Fläche für diese Parameter mit E^*, G^*, ... Der Index 1 beziehe sich auf diejenigen Grössen, welche der Schaar $q=C$ zugehören. Geht man auf einer Curve dieser Schaar in der Richtung fort, nach welcher p wächst (und entsprechend für die zweite Krümmungslinie), so wird

$$(11.)\qquad X_1=\frac{1}{\sqrt{E^*}}\frac{\partial x}{\partial p},\quad X_2=\frac{1}{\sqrt{G^*}}\frac{\partial x}{\partial q},$$

mithin

$$(12.)\qquad \mu_1^*=\frac{1}{\sqrt{E^*}},\quad \nu_1^*=0,\quad \mu_2^*=0,\quad \nu_2^*=\frac{1}{\sqrt{G^*}}.$$

Die Gleichung (10.) wird erfüllt. Jede der Grössen

$$(13.)\qquad \Theta_1\varphi=\frac{1}{\sqrt{E^*}}\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \Theta_2\varphi=\frac{1}{\sqrt{G^*}}\frac{\partial\varphi}{\partial q}$$

ist gleich dem Increment der Function φ beim Fortgange längs einer Krümmungslinie, dividirt durch das Bogenelement dieser Curve.

Die Auflösung der Gleichungen (8.) nach den Ableitungen ergiebt nun:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \sqrt{a}(\nu_2\Theta_1\varphi-\nu_1\Theta_2\varphi), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \sqrt{a}(-\mu_2\Theta_1\varphi+\mu_1\Theta_2\varphi). \end{cases}$$

Bildet man hieraus $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}$ auf doppelte Weise und setzt die entstehenden Ausdrücke einander gleich, so folgt:

$$(15.)\quad \Theta_2\Theta_1\varphi-\Theta_1\Theta_2\varphi = g_1\Theta_1\varphi-g_2\Theta_1\varphi.$$

Hierin ist

$$g_1 = \sqrt{a}(-\nu_2\Theta_1\mu_2+\nu_1\Theta_2\mu_2+\mu_2\Theta_1\nu_2-\mu_1\Theta_2\nu_2)-\frac{1}{\sqrt{a}}\Theta_2(\sqrt{a}),$$

$$g_2 = \sqrt{a}(\mu_2\Theta_1\nu_1-\mu_1\Theta_2\nu_1-\nu_2\Theta_1\mu_1+\nu_1\Theta_2\mu_1)-\frac{1}{\sqrt{a}}\Theta_1(\sqrt{a}),$$

d. h., wenn die Operationen Θ auf die Gleichung (10.) angewandt werden:

$$(16.)\quad \begin{cases} g_1 = \sqrt{a}\left[\mu_2(\Theta_1\nu_2-\Theta_2\nu_1)-\nu_2(\Theta_1\mu_2-\Theta_2\mu_1)\right], \\ g_2 = \sqrt{a}\left[\mu_1(\Theta_1\nu_2-\Theta_2\nu_1)-\nu_1(\Theta_1\mu_2-\Theta_2\mu_1)\right]. \end{cases}$$

Die Form der Gleichung (15.) lässt erkennen, dass die Grössen g_1, g_2 sich bei einer beliebigen simultanen Transformation der Formen A und B invariant verhalten. Geht man speciell zu den Variablen p, q über, für welche

$$a^{\bullet}_{12} = 0, \quad b^{\bullet}_{12} = 0$$

ist, so erhält man in Folge der Gleichungen (12.) oder

$$(12^{a}.)\quad \mu^{\bullet}_1 = \frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}}}, \quad \nu^{\bullet}_1 = 0, \quad \mu^{\bullet}_2 = 0, \quad \nu^{\bullet}_2 = \frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{22}}}$$

die Werthe:

$$(17.)\quad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}a^{\bullet}_{22}}}\frac{\partial\sqrt{a^{\bullet}_{11}}}{\partial q}, \quad g_2 = -\frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}a^{\bullet}_{22}}}\frac{\partial\sqrt{a^{\bullet}_{22}}}{\partial p}.$$

Die hier von selbst auftretenden Invarianten fallen also, geometrisch interpretirt, mit den geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien zusammen. Auf die Brauchbarkeit dieser Grössen für gewisse flächentheoretische Untersuchungen habe ich bereits an einer anderen Stelle [Acta mathematica, Bd. 15] hingewiesen. Welche Invarianten dritter Ordnung — so kann man g_1 und g_2 im Hinblick auf die Flächentheorie bezeichnen — noch ausserdem von vornherein einzuführen sind, lässt sich nicht allgemein entscheiden. Vom Gesichtspunkt der Formentheorie aus bieten sich offenbar zunächst

die Grössen dar:

$$\Theta_1 H, \quad \Theta_2 H, \quad \Theta_1 K, \quad \Theta_2 K$$

oder

$$\Theta_1 r_1, \quad \Theta_2 r_1, \quad \Theta_1 r_2, \quad \Theta_2 r_2.$$

Vom geometrischen Standpunkt dagegen wird man auf die Krümmungsmaasse K_1, K_2 der beiden Evoluten-Schalen geführt. Die a. a. O. mit (19.) bezeichneten Gleichungen lassen sich bei Anwendung des Zeichens Θ folgendermaassen schreiben:

$$\text{(18.)} \quad \begin{cases} \Theta_1 r_1 = \dfrac{r_1^4}{r_1-r_2}\dfrac{g_2}{K_1}, & \Theta_2 r_1 = (r_1-r_2)g_1, \\ \Theta_1 r_2 = (r_2-r_1)g_2, & \Theta_2 r_2 = \dfrac{r_2^4}{r_2-r_1}\dfrac{g_1}{K_2}. \end{cases}$$

Aus ihnen folgen mit Hülfe der Relationen

$$\text{(19.)} \quad \Theta_k H = \Theta_k r_1 + \Theta_k r_2, \quad \Theta_k K = r_1 \Theta_k r_2 + r_2 \Theta_k r_1 \qquad (k=1,2)$$

für die beiden Krümmungsmaasse die Ausdrücke:

$$\text{(20.)} \quad K_1 = \frac{-r_1^4}{(r_1-r_2)^2}\frac{\Theta_1 r_2}{\Theta_1 r_1}, \quad K_2 = \frac{-r_2^4}{(r_1-r_2)^2}\frac{\Theta_2 r_1}{\Theta_2 r_2}.$$

Die mittleren Krümmungen der Krümmungsmittelpunktsflächen lassen sich dann rational durch g_1, g_2, K_1 und K_2 darstellen [a. a. O. (17.)]. — Hervorzuheben ist, dass die zweite und dritte Formel (18.) aus den flächentheoretischen Fundamentalgleichungen folgen, also für beliebige Formen A, B nicht gelten.

IV.

Mit Hülfe der Operationen Θ_1, Θ_2 lassen sich die mit A und B zusammenhängenden Differentialparameter, wie sie in den Paragraphen II und I definirt worden sind, in einfacher und übersichtlicher Weise darstellen. Man hat dazu nur die in ihnen auftretenden Verbindungen

$$a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad b_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - b_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \eta_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \dots$$

nach den Gleichungen III. (14.) durch $\Theta_1 \varphi$ und $\Theta_2 \varphi$ auszudrücken und bei den Differentialparametern zweiter Ordnung die Differentiationen, eben-

falls nach diesen Gleichungen, durch die Operationen Θ zu ersetzen; wie dies schon bei der Herleitung der Formel III. (15.) geschieht. Die nöthigen Reductionen ergeben sich mit Benutzung der Formeln:

$$(1.)\quad \begin{cases} a_{11}\mu_k^2+2a_{12}\mu_k\nu_k+a_{22}\nu_k^2 = 1, & (k=1,\,2) \\ a_{11}\mu_1\mu_2+a_{12}(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)+a_{22}\nu_1\nu_2 = 0, \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} b_{11}\mu_k^2+2b_{12}\mu_k\nu_k+b_{22}\nu_k^2 = r_k, & (k=1,\,2) \\ b_{11}\mu_1\mu_2+b_{12}(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)+b_{22}\nu_1\nu_2 = 0. \end{cases}$$

Auf diese Weise folgt zunächst:

$$(3.)\quad \Delta_a(\varphi,\,\psi) = \Theta_1\varphi\Theta_1\psi+\Theta_2\varphi\Theta_2\psi,$$

$$(4.)\quad \Delta_b(\varphi,\,\psi) = \varrho_1\Theta_1\varphi\Theta_1\psi+\varrho_2\Theta_2\varphi\Theta_2\psi,$$

$$(5.)\quad \Delta_a^2\varphi = \Theta_1\Theta_1\varphi+\Theta_2\Theta_2\varphi-g_2\Theta_1\varphi-g_1\Theta_2\varphi.$$

Bei der Berechung von $\Delta_{ab}^2\varphi$ treten neue Invarianten hinzu, nämlich, wenn zur Abkürzung

$$(6.)\quad b_{11}\mu_k+b_{12}\nu_k = m_k,\quad b_{12}\mu_k+b_{22}\nu_k = n_k \qquad (k=1,\,2)$$

gesetzt wird, die Grössen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \nu_2\Theta_1 n_1-\nu_1\Theta_2 n_1+\mu_2\Theta_1 m_1-\mu_1\Theta_2 m_1 = r_1 g_1-\Theta_2 r_1, \\ -\nu_2\Theta_1 n_2+\nu_1\Theta_2 n_2-\mu_2\Theta_1 m_2+\mu_1\Theta_2 m_2 = r_2 g_2-\Theta_1 r_2, \end{cases}$$

deren eben angegebene Werthe sich durch Uebergang zu den Variablen $p,\,q$ herausstellen. Dabei werden die Gleichungen benutzt:

$$(8.)\quad m_1^{\bullet} = r_1\sqrt{a_{11}^{\bullet}},\quad n_1^{\bullet} = 0,\quad m_2^{\bullet} = 0,\quad n_2^{\bullet} = r_2\sqrt{a_{22}^{\bullet}}.$$

Der gesuchte Ausdruck ist:

$$(9.)\quad \Delta_{ab}^2\varphi = r_2\Theta_1\Theta_1\varphi+r_1\Theta_2\Theta_2\varphi-(r_2 g_2-\Theta_1 r_2)\Theta_1\varphi-(r_1 g_1-\Theta_2 r_1)\Theta_2\varphi,$$

und es ergiebt sich dann der Werth von $\Delta_b^2\varphi$ aus der Gleichung II. (10.) und der aus (4.) folgenden:

$$\Delta_b(\varphi,\,K) = \varrho_1\Theta_1\varphi\Theta_1 K+\varrho_2\Theta_2\varphi\Theta_2 K.$$

Setzt man:

$$(10.)\quad g_2+\frac{1}{2}\frac{r_2}{r_1}\Theta_1\frac{r_1}{r_2} = h_1,\quad g_1+\frac{1}{2}\frac{r_1}{r_2}\Theta_2\frac{r_2}{r_1} = h_2,$$

so lässt sich das Resultat auf die Form bringen:

$$(11.)\qquad \Delta_b^2\varphi = \varrho_1(\Theta_1\Theta_1\varphi - h_1\Theta_1\varphi) + \varrho_2(\Theta_2\Theta_2\varphi - h_2\Theta_2\varphi).$$

Die auf die Covariante E bezüglichen Differentialparameter sind mit Hülfe dieser Ergebnisse aus den Formeln II. (12.), (13.) sofort herzuleiten:

$$(12.)\qquad \Delta_e(\varphi,\ \psi) = \varrho_1^2\Theta_1\varphi\Theta_1\psi + \varrho_2^2\Theta_2\varphi\Theta_2\psi,$$

$$(13.)\qquad \Delta_e^2\varphi = \varrho_1^2(\Theta_1\Theta_1\varphi - (2h_1 - g_2)\Theta_1\varphi) + \varrho_2^2(\Theta_2\Theta_2\varphi - (2h_2 - g_1)\Theta_2\varphi).$$

Zur Bestimmung derjenigen Ausdrücke, welche mit $\mathfrak{C}$ zusammenhängen, braucht man noch die Relationen:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \eta_{11}\nu_1 - \eta_{12}\mu_1 = -ar_2\nu_1, & \eta_{11}\nu_2 - \eta_{12}\mu_2 = -ar_1\nu_2, \\ \eta_{21}\nu_1 - \eta_{22}\mu_1 = ar_2\mu_1, & \eta_{21}\nu_2 - \eta_{22}\mu_2 = ar_1\mu_2, \end{cases}$$

aus welchen folgt:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \eta_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \eta_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -(\sqrt{a})^3(r_1\nu_2\Theta_1\varphi - r_2\nu_1\Theta_2\varphi), \\ \eta_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \eta_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = (\sqrt{a})^3(r_1\mu_2\Theta_1\varphi - r_2\mu_1\Theta_2\varphi). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich nach I (3.), unter Berücksichtigung der Werthe II (6.):

$$(16.)\qquad \Delta_{\mathfrak{c}}(\varphi,\ \psi) = \varrho_2\Theta_1\varphi\Theta_2\psi - \varrho_1\Theta_2\varphi\Theta_1\psi.$$

$\Delta_c(\varphi,\ \psi)$ kann nach I (16.) abgeleitet werden, wenn

$$D_{\mathfrak{c}}(\varphi,\ \psi) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mathfrak{c}}} D_a(\varphi,\ \psi)$$

bekannt ist; $J_{\mathfrak{c}}$ und λ sind bereits angegeben worden (II (9.)). Aus den Gleichungen III (14.) folgt aber

$$(17.)\qquad D_a(\varphi,\ \psi) = \Theta_1\varphi\Theta_2\psi - \Theta_2\varphi\Theta_1\psi;$$

mithin ist:

$$(18.)\qquad \Delta_c(\varphi,\ \psi) = \frac{2}{r_2 - r_1}(\Theta_1\varphi\Theta_2\psi + \Theta_2\varphi\Theta_1\psi).$$

Die Berechnung von $\Delta_{\mathfrak{c}}^2\varphi$ wird wieder zweckmässig an die eines Differentialparameters $\Delta_{a\mathfrak{c}}^2\varphi$ geknüpft, welcher durch die Gleichung

$$(19.)\qquad \Delta_{a\mathfrak{c}}^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\eta_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \eta_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{a} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\eta_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \eta_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{a}\right]$$

definirt wird und mit $\Delta_{\mathfrak{c}}^2\varphi$ vermöge der Formel

$$(20.)\qquad \Delta_{\mathfrak{c}}^2\varphi = \frac{1}{K}[\Delta_{a\mathfrak{c}}^2\varphi - \tfrac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{c}}(\varphi,\ K)]$$

zusammenhängt. Die auftretenden Invarianten sind dieselben wie bei $\Delta_b^2\varphi$, und die Resultate werden:

$$(21.)\quad \Delta_{ac}^2\varphi = r_1\Theta_2\Theta_1\varphi - r_2\Theta_1\Theta_2\varphi - (r_1g_1 - \Theta_2r_1)\Theta_1\varphi + (r_2g_2 - \Theta_1r_2)\Theta_2\varphi$$

$$(22.)\quad \Delta_c^2\varphi = \varrho_2(\Theta_2\Theta_1\varphi - h_2\Theta_1\varphi) - \varrho_1(\Theta_1\Theta_2\varphi - h_1\Theta_2\varphi).$$

Verfährt man ebenso für $\Delta_c^2\varphi$, indem man den aus $\Delta_{ac}^2\varphi$ leicht abzuleitenden Differentialparameter $\Delta_{ac}^2\varphi$ hinzunimmt, so erhält man:

$$(23.)\quad \tfrac{1}{4}(H^2-4K)\Delta_c^2\varphi = r_2(\Theta_1\Theta_2\varphi - g_2\Theta_2\varphi) - r_1(\Theta_2\Theta_1\varphi - g_1\Theta_1\varphi).$$

V.

Die vorstehenden Formeln sind vollständig aufgestellt worden, um zu zeigen, in wie fern die Bildung der Differentialparameter durch die Anwendung der Operationen Θ ersetzt werden kann; wenigstens sobald die simultane Behandlung zweier quadratischen Differentialformen in Frage kommt. Es ist noch nachzuweisen, wie man mit Benutzung jener Gleichungen die Grundformeln für die in der Flächentheorie auftretenden Differentialparameter erhalten kann, von denen einige, und zwar nicht bloss die der Form ds^2 zugehörigen, in neuester Zeit für wichtige Aufgaben verwerthet worden sind. In den gefundenen Ausdrücken sollen φ und ψ gleich den Grössen

$$x,\quad y,\quad z,\quad X,\quad Y,\quad Z,\quad \Sigma xX = P,\quad \tfrac{1}{2}\Sigma x^2 = Q$$

angenommen werden. Die Berechnung vereinfacht sich von vornherein wesentlich dadurch, dass man die Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{T^2}\left(\eta_{11}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} + \eta_{12}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{T^2}\left(\eta_{21}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} + \eta_{22}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right) \end{cases}$$

hinzunimmt, welche für

$$f = X,\quad Y,\quad Z,\quad P$$
$$\chi = x,\quad y,\quad z,\quad Q$$

bestehen und aus der Definition der Grössen X, Y, Z, nämlich

$$X = D_a(y, z),\quad \ldots$$

folgen. Ersetzt man in ihnen die Ableitungen durch die Grössen $\Theta_k f$, $\Theta_k\chi$ vermöge der Formeln III (14.) und löst nach den beiden ersten Grössen

auf, so folgt:

$$(2.)\qquad \Theta_1 f = -r_1\Theta_1\chi,\quad \Theta_2 f = -r_2\Theta_2\chi.$$

Die Formeln des § IV lehren dann, dass man ausser den Invarianten nur diejenigen Grössen zu kennen braucht, welche durch ein- oder zweimalige Anwendung der Operationen Θ_k auf x und Q entstehen. Denn die auf y und z bezüglichen Resultate ergeben sich aus denen für x durch einfache Vertauschungen.

Die sechs, in den allgemeinen Formeln auftretenden Invarianten dritter Ordnung

$$g_1,\quad g_2,\quad \Theta_1 r_1,\quad \Theta_1 r_2,\quad \Theta_2 r_1,\quad \Theta_2 r_2$$

reduciren sich in Folge der Fundamentalgleichungen auf vier. Die erste dieser Gleichungen lässt sich am einfachsten in der Gestalt

$$(3.)\qquad K_{ab} = K_a$$

darstellen, wo K_a die *Gauss*sche Invariante der Differentialform $A = ds^2$ bezeichnet. Wie schon erwähnt, können die beiden anderen durch die zweite und dritte Gleichung III (18.):

$$(4.)\qquad r_1 g_1 - \Theta_2 r_1 = r_2 g_1,\quad r_2 g_2 - \Theta_1 r_2 = r_1 g_2$$

ersetzt werden, und es bleiben mithin die Grössen

$$g_1,\quad g_2,\quad \Theta_1 r_1,\quad \Theta_2 r_2 \quad\text{oder}\quad g_1,\quad g_2,\quad h_1,\quad h_2$$

als unabhängig übrig. Man erhält noch

$$(5.)\qquad h_1 = \frac{g_2}{2r_2}\left(H + \frac{r_2 r_1^3}{(r_1-r_2)K_1}\right),\quad h_2 = \frac{g_1}{2r_1}\left(H + \frac{r_1 r_2^3}{(r_2-r_1)K_2}\right).$$

Nun ist (III (1.)):

$$(6.)\qquad \Theta_1 x = X_1,\quad \Theta_2 x = X_2,$$

und es sind daher die vier Grössen $\Theta_k X_i$ zu bestimmen. Man kann diese Berechnung mit Hülfe der Eigenschaften der geodätischen Krümmung und der *Frenet*schen Formeln durchführen; oder, wenn man nichts aus der Geometrie, speciell der Curventheorie, entlehnen will, auf directem Wege durch Uebergang zu den Variablen p, q, wobei die partiellen Differentialgleichungen zu benutzen sind, welchen die Cartesischen Coordinaten der Fläche genügen. Man findet so:

$$(7.)\qquad \Theta_1\Theta_2 x \equiv \Theta_1 X_2 = -g_1 X_1,\quad \Theta_2\Theta_1 x \equiv \Theta_2 X_1 = -g_2 X_2,$$

$$(8.)\qquad \Theta_1\Theta_1 x \equiv \Theta_1 X_1 = r_1 X + g_1 X_2,\quad \Theta_2\Theta_2 x \equiv \Theta_2 X_2 = r_2 X + g_2 X_1.$$

In Folge von (2.) treten den Gleichungen (6.) die folgenden zur Seite:

$$(9.)\qquad \Theta_1 X = -r_1 X_1, \quad \Theta_2 X = -r_2 X_2.$$

Es sind die altbekannten Formeln von *Rodrigues*. Aus ihnen ergiebt sich, entsprechend (7.) und (8.):

$$(10.)\qquad \begin{cases} \Theta_1\Theta_2 X = r_2 g_1 X_1 + (r_1 - r_2) g_2 X_2, \\ \Theta_2\Theta_1 X = (r_2 - r_1) g_1 X_1 + r_1 g_2 X_2, \end{cases}$$

$$(11.)\qquad \begin{cases} \Theta_1\Theta_1 X = -r_1^2 X - \dfrac{r_1^4 g_2}{(r_1-r_2)K_1} X_1 - r_1 g_1 X_2, \\ \Theta_2\Theta_2 X = -r_2^2 X - r_2 g_2 X_1 - \dfrac{r_2^4 g_1}{(r_2-r_1)K_2} X_2. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in die Formeln des § IV eingesetzt, so erhält jeder Differentialparameter zweiter Ordnung die Form:

$$(12.)\qquad \Delta^2 x = AX + A_1 X_1 + A_2 X_2, \quad \Delta^2 X = BX + B_1 X_1 + B_2 X_2,$$

wo die Grössen $A, \ldots, B_2$ Functionen der Invarianten zweiter und dritter Ordnung oder Constanten (Null eingeschlossen) bezeichnen. Sieht man von den Differentialparametern mit doppeltem Index ab, so ist die von *Beltrami* gegebene Formel

$$(13.)\qquad \Delta_a^2 x = HX$$

(und ihr Specialfall, $\Delta_e^2 X = -2X$) dadurch vor den übrigen ausgezeichnet, dass sie die einzige ist, in welcher keine Invarianten dritter Ordnung vorkommen. — Die übrigen Differentialparameter erscheinen als einfache quadratische oder bilineare Functionen der Grössen $X_1, \ldots, Z_2$; die Coefficienten sind Invarianten zweiter Ordnung oder Constanten.

Um aus diesen Ausdrücken die Differentialparameter der Functionen P und Q abzuleiten, hat man — von directeren Wegen abgesehen, welche sich in einigen Fällen darbieten —, die Formeln zu benutzen, welche sich auf die Differentialparameter einer Summe und eines Productes von Functionen beziehen. Es treten dabei die Grössen

$$\Sigma x X_k = \Sigma(x + \varrho_k X) X_k = \Sigma x_k X_k = P_k \qquad (k = 1, 2)$$

auf, welche die algebraischen Werthe der Abstände des Coordinatenanfangspunktes von den beiden Hauptebenen (oder Tangentialebenen der Evoluten-Schalen) darstellen. —

Führt man in die Ausdrücke der Differentialparameter zweiter Ordnung für die willkürlichen Functionen die Grössen H und K ein, so kommt

man zu Invarianten vierter Ordnung. Eine Beziehung zwischen solchen ist vermöge der *Bonnet*schen Darstellung des *Gauss*schen Krümmungsmaasses bekannt; es ist:

$$(14.)\qquad K = \Theta_1 g_2 + \Theta_2 g_1 - g_1^2 - g_2^2.$$

Wird diese Gleichung in eine Relation zwischen Differentialparametern von H und K umgewandelt, so erscheinen die der zweiten Ordnung nur in der Verbindung $\Delta_a^2 K - K\Delta_b^2 H$. Aus diesem Umstande ist leicht zu schliessen, dass die Relation mit der von *Frobenius* [a. a. O. S. 31] aufgestellten übereinkommen muss.

Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie.

(Von Herrn *K. Zsigmondy* in Wien.)

Die Anzahl Z der zwischen zwei positiven Grenzen M und N $(M > N)$ gelegenen und durch die Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ nicht theilbaren Zahlen bestimmt *Kronecker* in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie durch den Ausdruck

$$Z = [N]-[M]-\sum_p \left\{\left[\frac{N}{p}\right]-\left[\frac{M}{p}\right]\right\}+\sum_{pp'}\left\{\left[\frac{N}{pp'}\right]-\left[\frac{M}{pp'}\right]-\cdots+\cdots\right\},$$

wo die Summen sich über die betreffenden Combinationen der Elemente $p_1, \ldots, p_s$ zu erstrecken haben und das Symbol $\left[\frac{R}{k}\right]$ die grösste ganze in dem Quotienten $\frac{R}{k}$ enthaltene Zahl bedeutet.

Ersetzt man nun $p_1, \ldots, p_s$ in der Formel für Z durch beliebige positive ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_s$, von denen je zwei relativ prim zu einander seien, so erhält man einen Ausdruck, der, wie im Folgenden gezeigt werden soll, noch immer die analoge Anzahl darstellt.

Es bezeichne $f(l)$ irgend eine Function von l. Fügt man zu dem Systeme $f(l)$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ alle diejenigen Systeme $f(k.n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_j})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ hinzu, bei welchen $i_1, \ldots, i_j$ irgend eine Combination aus einer geraden Anzahl von Elementen der Reihe $1, 2, \ldots, s$ bedeutet, und scheidet man hierauf alle diejenigen Systeme aus, bei denen $i_1, \ldots, i_j$ eine Combination aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bildet, so bleibt von dem Systeme $f(l)$ die Gesammtheit der Functionen $f(\alpha)$, deren Argument kein Vielfaches von $n_1, \ldots, n_s$ ist, allein übrig. Jedes Multiplum m von irgend einer Combination von $n_1, \ldots, n_s$ hat nämlich die eindeutig bestimmte Form $\mu.n_{i_1}, \ldots, n_{i_k}$, wo μ durch kein anderes n als $n_{i_1}, \ldots, n_{i_k}$ theilbar



ist. Es kommt somit $f(m)$ in dem Schlusssysteme $\left(1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots\right)$-mal, also überhaupt nicht vor.

Berücksichtigt man nun in dem ursprünglichen Systeme nur die r ersten Elemente, so erhält man, für $\left[\frac{r}{k}\right]$ der Kürze halber r_k geschrieben, die Gleichung:

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha} f(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} f(k) - \sum_{n}\sum_{k=1}^{r_n} f(kn) + \sum_{nn'}\sum_{k=1}^{r_{nn'}} f(k.nn') - \cdots + \cdots,$$

in welcher das α alle positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, die kleiner oder gleich r und durch $n_1, \ldots, n_\varrho$ nicht theilbar sind, und die äusseren Summen auf der rechten Seite sich über die betreffenden Combinationen der Elemente $n_1, \ldots, n_\varrho$ zu erstrecken haben.

Setzt man in der Gleichung (1.) speciell $f(k) = 1$, so ergiebt sich für die Anzahl $\varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho)$ der Zahlen, die kleiner oder gleich r und durch $n_1, \ldots, n_\varrho$ nicht theilbar sind, der Ausdruck

$$\varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho) = r - \sum_{n} r_n + \sum_{nn'} r_{nn'} - \cdots + \cdots.$$

Die Differenz $\varphi(N;\, n_1, \ldots, n_\varrho) - \varphi(M;\, n_1, \ldots, n_\varrho)$ liefert die zu Z analoge Formel mit der analogen Bedeutung.

Nachstehend sollen noch einige Sätze über die Function $\varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho)$ angegeben werden. Zunächst lässt sich durch den Schluss von ϱ auf $\varrho+1$ folgende Gleichung beweisen:

$$\varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho, \nu_1, \ldots, \nu_\varrho) = \varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho) - \sum_{\nu} \varphi(r_\nu;\, n_1, \ldots, n_\varrho)$$
$$+ \sum_{\nu\nu'} \varphi(r_{\nu\nu'};\, n_1, \ldots, n_\varrho) - \cdots + \cdots;$$

speciell ist für $\varrho = 1$:

$$\varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho, \nu_1) = \varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho) - \varphi(r_{\nu_1};\, n_1, \ldots, n_\varrho)$$

Weiter kann unter Benutzung dieser Relation die Formel

$$r = \varphi(r;\, n_1, \ldots, n_\varrho) + \sum_{i=1}^{\varrho} \varphi(r_{n_i};\, n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_\varrho)$$
$$+ \sum_{nn'} \varphi(r_{nn'};\, n_1, \overset{nn'}{\smile}\ldots, n_\varrho) + \cdots,$$

ebenfalls mittelst höherer Induction bewiesen werden. Sie besteht nämlich für $\varrho = 1$. Nimmt man sie also für $\varrho-1$ Zahlen $n_1, \ldots, n_{\varrho-1}$ als bewiesen an, so kann man sie in die Form

$$r = \varphi(r;\, n_1, \ldots, n_{\varrho-1}) + \sum_n \varphi(r_n;\, n_1, \overset{\overset{n}{\smile}}{\ldots}, n_{\varrho-1}) + \cdots$$

$$-\varphi(r_{n_\varrho};\, n_1, \ldots, n_{\varrho-1}) - \sum_n \varphi(r_{nn_\varrho};\, n_1, \overset{\overset{n}{\smile}}{\ldots}, n_{\varrho-1}) - \cdots$$

$$+\varphi(r_{n_\varrho};\, n_1, \ldots, n_{\varrho-1}) + \sum_n \varphi(r_{nn_\varrho};\, n_1, \ldots, n_{\varrho-1}) + \cdots$$

setzen, aus welcher sich durch Addition der verticalen Zeilen die Gültigkeit derselben Gleichung für ϱ Zahlen $n_1, \ldots, n_\varrho$ ergiebt.

Durch ein ähnliches Verfahren erkennt man die Richtigkeit der Gleichung

$$r = \sum_\delta \varphi(r_\delta;\, n_1, \ldots, n_\varrho),$$

in welcher das δ sich auf alle Combinationen $n_{i_1}^{\pi_{i_1}}, \ldots, n_{i_k}^{\pi_{i_k}} \leqq r$ $(k = 1, 2, \ldots, \varrho)$ bezieht.

Wählt man als Zahlen $n_1, \ldots, n_\varrho$ die verschiedenen in r aufgehenden Primzahlen, so erhält man den bekannten Satz $r = \sum_\delta \varphi(\delta)$, wo das δ alle Theiler von r zu durchlaufen hat.

In analoger Weise kann ein in der Theorie der Kreistheilung auftretender Satz verallgemeinert werden, so dass er sich in der folgenden Form aussprechen lässt:

Ist $f(k)$ irgend eine Function der ganzen Zahl k und besteht für alle ganzen Zahlen r die Gleichung

$$\sum_\delta f(r_\delta) = F(r), \quad \delta = n_{i_1}^{\pi_{i_1}}, \ldots, n_{i_k}^{\pi_{i_k}} \leqq r, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

so ist

$$f(r) = F(r) - \sum_n F(r_n) + \sum_{nn'} F(r_{nn'}) - \cdots + \cdots.$$

Der Beweis stützt sich auf ähnliche Betrachtungen wie die oben angedeuteten.

Zum Schlusse sei bemerkt, das aus der Gleichung (1.) durch passende Wahl der Function $f(\alpha)$ eine Reihe anderer Formeln abgeleitet werden kann. So ergiebt die Specialisirung $f(\alpha) = \alpha$ respective $f(\alpha) = \log \alpha$ die Summe respective das Product aller Zahlen, die kleiner oder gleich r und durch $n_1, \ldots, n_\varrho$ nicht theilbar sind.

On *Halphen*'s Characteristic n, in the theory of Curves in Space.

(By Prof. *Cayley* in Cambridge.)

If we consider a curve in space without actual singularities, of the order (or degree) d, then this has a number h of apparent double points (adps.) viz. taking as vertex an arbitrary point in space we have through the curve a cone of the order d, with h nodal lines; and *Halphen* denotes by n the order of the cone of lowest order which passes through these h lines. For a given value of d, h is at most $=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, and as shown by *Halphen* it is at least $=[\frac{1}{4}(d-1)^2]$, if we denote in this manner the integer part of $\frac{1}{4}(d-1)^2$. For given values of d, h, it is easy to see that n must lie within certain limits, viz. if ν be the smallest number such that $\frac{1}{2}\nu(\nu+3)$ equal to or greater than h, then n is at most $=\nu$; and moreover n must have a value such that nd is at least $=2h$, or say we must have $nd=2h+\theta$, where θ is $=0$ or positive. For any given value of d, we thus have a finite number of forms (d, h, n), and we have thus *prima facie* curves in space of the several forms (d, h, n): but it may very well be and in fact *Halphen* finds that when $d=9$ or upwards, then for certain values of h, n as above, there is not any curve (d, h, n); thus $d=9$, $h=17$ the values of n are $n=4$, $n=5$, but there is not any curve $d=9$, $h=17$ for either of these values of n; or say the curves $(9, 17, 4)$ and $(9, 17, 5)$ are non-existent. And in the Notes and References to the papers 302, 305 in vol. 5 of my „Collected Mathematical Papers", 4° Cambridge 1892, see p. 615 I remarked that in certain cases for which *Halphen* finds a curve (d, h, n) such curve does not exist except for special configurations of the h nodal

lines not determined by the mere definition of n as the order of the cone of lowest order which passes through the h nodal lines; for instance $d=9$, $h=16$, $n=4$, for which *Halphen* gives a curve, I find that for the existence of the curve it is not enough that the 16 lines are situate upon a quartic cone, but they must be the 16 lines of intersection of two quartic cones.

In fact starting from an existing curve, say the complete intersection of two given surfaces of the orders μ, ν respectively, we have as is known $d=\mu\nu$; $2h=\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$: we find also as will appear $n=(\mu-1)(n-1)$: hence also $nd=2h$, viz. the cone of the order n through the h nodal lines meets the cone of the order d in these lines counting each twice, and in no other lines. I remark also that h is $=\frac{1}{2}n(n+3)$ if $\mu+\nu=4$; viz. we have here two nodal lines lying in a plane; but if $\mu+\nu>4$, then h is greater than $\frac{1}{2}n(n+3)$, viz. in this case the nodal lines are not h lines taken at pleasure, but they are lines subject to the condition of lying in a cone of the order n. But this is not all; the h nodal lines lie not only in this cone of lowest order n, but also in cones of the orders $n+1$, $n+2$, ..., $n+(\mu+\nu-2)$ respectively: I do not for the moment attempt to determine the number of independent conditions which are hereby imposed upon the h lines.

The last mentioned theorem constitutes in fact the geometrical interpretation of results contained in *Jacobi*'s paper „De eliminatione variabilis e duobus aequationibus algebraicis" (this Journal t. XV, (1836) p. 101—124.) Consider the two equations

$$U=({}^*\between x,\ y,\ z,\ w)^{\mu}=0;\quad V=({}^*\between x,\ y,\ z,\ w)^{\nu}=0;$$

representing surfaces of the orders μ, ν respectively; since the form of the equations is quite arbitrary, we may without loss of generality assume that the point $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ is an arbitrary point in space; and this being so, we find the equation of the cone, vertex this point, which passes through the curve of intersection of the two surfaces by the mere elimination of w between the two equations. As the reasoning is exactly the same for a particular case, I write for convenience $\mu=3$, $\nu=4$, and consider the two equations

$$\begin{aligned} A_0w^3+A_1w^2+A_2w+A_3 &= 0, \\ B_0w^4+B_1w^3+B_2w^2+B_3w+B_4 &= 0, \end{aligned}$$

where the suffixes show the degrees in regard to (x, y, z), viz. A_0, B_0 are

mere constants, A_1, B_1 are linear functions $(*\between x, y, z)^1$, A_2, B_2 quadric functions $(*\between x, y, z)^2$ and so on. Multiplying the first equation successively by 1, w, w^2, w^3, and the second equation successively by 1, w, w^2, we have 7 equations from which to eliminate 1, w, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, and the result is

$$\left|\begin{array}{ccccccc} & & & A_0 & A_1 & A_2, & A_3 \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & & \end{array}\right| = 0,$$

viz. this is an equation

$$(*\between x, y, z)^{12} = 0,$$

of the cone of the order $d = 12$, through the curve of intersection of the two surfaces: say this equation is $\Omega = 0$.

But if we only multiply the first equation by 1, w, w^2 successively and the second equation by 1, w successively then we have 5 equations serving to determine the ratios of w^5, w^4, w^3, w^2, w, 1, viz. we have these quantities proportional to the six determinants which can be formed out of the matrix

$$\left|\begin{array}{cccccc} & & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \end{array}\right|;$$

say we have

$$\begin{aligned} & w^5 : w^4 : w^3 : w^2 : w : 1 \\ = & \; L : M : N : P : Q : R, \end{aligned}$$

where L, M, N, P, Q, R represent homogeneous functions $(*\between x, y, z)^\theta$, of

the degrees 11, 10, 9, 8, 7, 6 respectively. We may if we please write

$$w = \frac{L}{M} = \frac{M}{N} = \frac{N}{P} = \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R};$$

or eliminating w we have the series of equations which may be written

$$\begin{vmatrix} L, & M, & N, & P, & Q \\ M, & N, & P, & Q, & R \end{vmatrix} = 0$$

viz. we thus denote that the determinants formed with any two columns of this matrix are severally $= 0$. This of course implies that each of the determinants in question is the product of Ω into a factor which is a homogeneous function of the proper degree in (x, y, z), so that the several equations are all of them satisfied if only $\Omega = 0$. We have for instance $PR - Q^2 = A\Omega$, where A is a quadric function $(*\between x, y, z)^2$; similarly $NR - PQ = B\Omega$, where B is a cubic function $(*\between x, y, z)^3$; and the like as regards the other determinants.

If the ratios $x : y : z$ have any given values such that we have for these $\Omega = 0$, then w has a determinate value, that is on each line of the cone $\Omega = 0$, there is a single point of the curve of intersection of the two surfaces: the only exceptions are when for the given values of $x : y : z$, the expressions for w assume an indeterminate form, viz. w has than two values, and there are upon the line two points of the curve, or what is the same thing, the line is a nodal line of the cone: the conditions for a nodal line thus are $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, viz. each of these equations is that of a cone passing through the nodal lines of the cone $\Omega = 0$; the cone of lowest order is $R = 0$, a cone of the order 6 meeting the cone $\Omega = 0$ of the order 12 in 36 lines each twice, which lines are consequently the nodal lines of the cone $\Omega = 0$. The mere condition of the 36 lines lying upon a cone of the order 6 shows that the 36 lines are not arbitrary; and we have moreover through the 36 lines cones of the orders 7, 8, 9, 10 and 11 respectively. Obviously the foregoing reasoning is quite general, and for the surfaces of the orders μ, ν we have as stated above the cone Ω of the order $\mu\nu$, with $h = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$ nodal lines, the intersections (each counting twice) of this cone with a cone of the order $n = (\mu-1)(\nu-1)$; and moreover the h nodal lines lie also in cones of the orders $n+1$, $n+2$, ..., $n+\mu+\nu-2$ respectively.

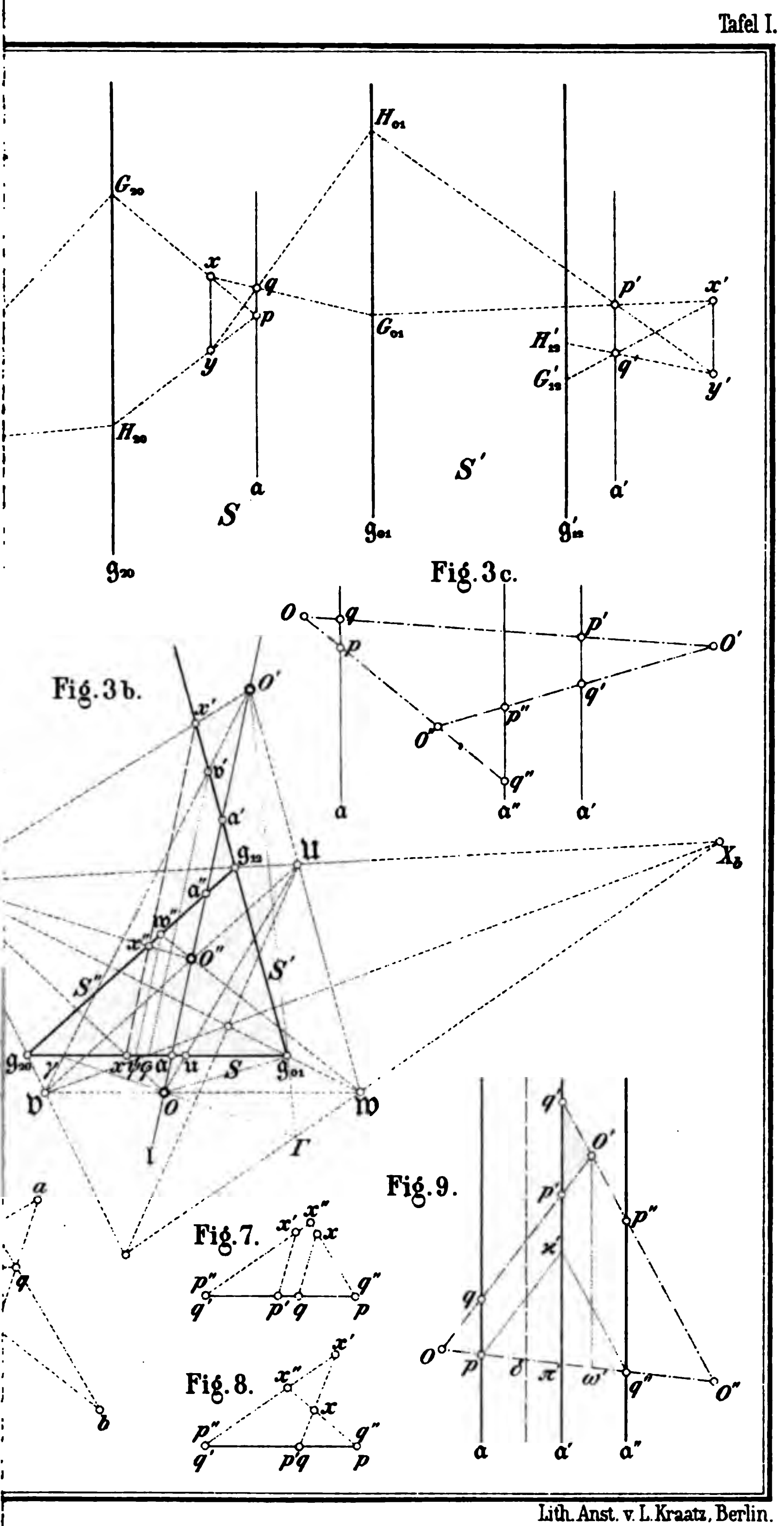
To examine the meaning of the theorem, I form the table

μ, ν	d	h	$n, \ldots, n+\mu+\nu-2$
2, 2	4	2	1, 2, 3
2, 3	6	6	2, 3, 4, 5
2, 4	8	12	3, 4, 5, 6, 7
2, 5	10	20	4, 5, 6, 7, 8, 9
⋮			
3, 3	9	18	4, 5, 6, 7, 8
3, 4	12	36	6, 7, 8, 9, 10, 11
3, 5	15	60	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
⋮			
4, 4	16	72	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
4, 5	20	120	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.
⋮			

Here μ, $\nu = 2$, 2, there are 2 nodal lines, which are arbitrary, and of course lie on cones of the orders 1, 2, 3 respectively. So μ, $\nu = 2$, 3; there are 6 nodal lines, which are not arbitrary, inasmuch as they lie on a cone of the order 2; but regarding them as arbitrary lines on such a cone, we can through them draw a cone of the order 3 or any higher order, and it is thus no specialisation to say that they lie upon cones of the orders 3, 4 and 5. But going a step further $\mu = 2$, $\nu = 4$: here we have 12 nodal lines, which inasmuch as they lie on a cone of the order 3 are not arbitrary: and they are not arbitrary lines upon this cone, for they lie on a cone of the order 4, and such a cone can be drawn through at most 11 arbitrary lines on a cubic cone: [in fact upon a cone of the order θ, taking at pleasure N lines, the condition that it may be possible through these to draw a cone of the order $\theta+1$ is $\frac{1}{2}(\theta+1)(\theta+4) = N+3$ at least; for if this number were $= N+2$, then through the N points we have only the improper cone $(x+\beta y+\gamma z)U_\theta = 0$, if $U_\theta = 0$ is the cone of the order θ]. It thus appears that the 12 nodal lines are not arbitrary lines on a cubic cone, but that they constitute the complete intersection of a cubic cone and a quartic cone. But through such 12 lines we may draw cones of the 5th and higher orders, and it is thus no further condition that the 12 lines lie on cones of the orders 5, 6 and 7 respectively.

So again $\mu = 3$, $\nu = 3$; we have here 18 nodal lines, which inasmuch as they lie on a cone of the order 4 are not arbitrary: and they are not arbitrary lines on this cone inasmuch as they lie also on a cone of the order 5, and such a cone can be drawn through at most 17 arbitrary lines on the quartic cone: it thus appears that the 18 nodal lines are 18 out of the 20 lines of intersection of a cone of a quartic cone and a quintic cone. But there is no further condition, for through such lines we can draw a cone of the order 6 or any higher order and thus the lines lie on cones of the orders 6, 7 and 8 respectively. It appears probable however that for higher values of μ, ν, it would be necessary to take account not only (as in these examples) of the cones of the orders n and $n+1$, but of those of higher orders $n+2$, etc.; and thus that it is ***not*** the true form of the theorem to say that the h nodal lines must be h out of the $n(n+1)$ lines of intersection of two cones of the orders n and $n+1$ respectively.

It appears by what precedes that the h, $=\frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$, lines which are the nodal lines of the cone of arbitrary vertex which passes through the curve of intersection of two surfaces of the orders μ, ν respectively, form a remarkable special system of lines, which well deserve further study. I remark also, that without having proved the negative, it seems to me clear that given the values of d, h, n it is only in the cases where the h lines form some such special system (and not in the general case where the h nodal lines are any lines whatever on a cone of the order n) that there exists a curve (d, h, n); and thus that the question for further investigation is, for given values of (d, h, n) to determine the conditions necessary for the existence of a curve in space with these characteristics (d, h, n).



Lith. Anst. v. L. Kraatz, Berlin.

